LEERBOEK | WISKUNDE B | VWO DEEL 3

GETAL & RUIMTE

B

Noordhoff

Getal & Ruimte

vwo B deel 3

Twaalfde editie, 2021

Noordhoff
Groningen

Auteurs

J. H. Dijkhuis
G. de Jong
H. J. Houwing
J. D. Kuis
F. ten Klooster
S. K. A. de Waal
J. van Braak
J. M. H. Liesting-Maas
M. Wieringa
R. D. Hiele
J. E. Romkes
M. Haneveld
S. Voets
M. Vos
J. M. M. van Haren
B. W. van Laarhoven
R. Meijerink
E. Terlaak

Voorwoord

Aan de docent,

Het boek vwo B deel 3
Samen met de delen 1, 2 en 4 van vwo wiskunde B bevat dit boek de leerstof van het programma vwo wiskunde B, zoals dat met ingang van 2015 is vastgesteld. De totale studielast van het vak vwo wiskunde B is 600 uur. De delen 1, 2, 3 en 4 bevatten samen 17 hoofdstukken.
Deel 3 is bestemd voor het vijfde leerjaar. Afhankelijk van de verdeling van de studielast over de leerjaren vier, vijf en zes zal in het vijfde leerjaar eerst vwo B deel 2 moeten worden afgehandeld. Na deel 3 wordt in het zesde leerjaar nog deel 4 doorgewerkt.
In de vijf hoofdstukken van dit boek, die elk een studielast van ongeveer 30 uur hebben, komen de volgende (sub)domeinen aan de orde.
Hoofdstuk 9 Exponentiële en logaritmische functies: B Functies, grafieken en vergelijkingen en C2 Technieken voor differentiëren.
Hoofdstuk 10 Meetkunde met vectoren: E2 Algebraïsche methoden in de vlakke meetkunde en E3 Vectoren en inproduct.
Hoofdstuk 11 Integraalrekening: C3 Integraalrekening.
Hoofdstuk 12 Goniometrische formules: D Goniometrische functies en E3 Vectoren en inproduct.
Hoofdstuk K Voortgezette integraalrekening: F Keuzeonderwerpen.

Bespreking van de hoofdstukken
In hoofdstuk 9 worden de rekenregels voor logaritmen bewezen en gebruikt, bijvoorbeeld bij het oplossen van vergelijkingen. In de tweede helft van het hoofdstuk komen het getal e en de natuurlijke logaritme aan de orde, waarbij ook de afgeleiden van exponentiële en logaritmische functies worden behandeld.
In hoofdstuk 10 worden vectoren gebruikt in allerlei situaties, zoals bij rotaties, voorstellingen van lijnen, berekeningen van hoeken en bij berekeningen bij snelheid en versnelling.
In hoofdstuk 11 wordt eerst het begrip primitieve functie behandeld. Hiermee worden oppervlakten en inhouden berekend. Aan het eind van paragraaf 11.3 worden integralen ook numeriek berekend, en in de laatste paragraaf komen enkele toepassingen van integralen aan de orde, zoals snelheid en versnelling.
In hoofdstuk 12 wordt gerekend met goniometrische formules bij vergelijkingen, herleidingen, symmetrie en primitiveren. Ook de eenparige cirkelbewegingen en de harmonische trillingen ontbreken niet. De bewegingsvergelijkingen komen opnieuw aan de orde, maar nu met goniometrische formules.
In het keuzehoofdstuk K worden de substitutiemethode en het partieel integreren aangeboden. Ook komen cyclometrische functies aan de orde, en het berekenen van primitieven met behulp van breuksplitsen.
Men is vrij om een ander keuzeonderwerp te kiezen en hoofdstuk K over te slaan.

Opbouw
De opbouw in deel 3 is dezelfde als in de delen 1 en 2. Elk hoofdstuk heeft een begin- en eindopdracht en een paragraaf Voorkennis. De oriëntatie-opgaven staan voor elke nieuwe theorie en activeren het denken over een nieuw wiskundig begrip. Ook de reflectie-opgaven spelen een belangrijke rol bij het activeren van een wiskundige denkhouding. Naast de gewone opgaven zijn er nog de afsluitende opgaven en de extra opgaven. De afsluitende opgaven geven het beoogde eindniveau aan. De extra opgaven doorbreken de standaardaanpak en activeren zo het wiskundig denken.
Elke paragraaf wordt afgesloten met een Terugblik, aan het eind van elk hoofdstuk staat een Diagnostische toets en achterin het boek staan de Gemengde opgaven.

Drie leerroutes
In deze editie wordt gewerkt met drie leerroutes: de basisroute, de middenroute en de uitdagende route. De theorie is voor alle routes gelijk. Bij de opgaven zijn de routes aangegeven met symbolen. Een gevolg van het werken met deze routes is dat leerlingen niet alle aangeboden opgaven hoeven te maken. De routes zijn zo samengesteld, dat alle leerlingen in hetzelfde tempo het hoofdstuk doorwerken. Nieuwe theorie kan dus klassikaal aan de orde komen.
De basisroute geeft de leerling voldoende oefening om zich alle vaardigheden die bij de eindtermen horen eigen te maken.
In de middenroute worden enkele oefenopgaven overgeslagen en in plaats hiervan maakt de leerling opgaven die dieper op de stof ingaan.
De uitdagende route is voor de leerlingen die de basisstof snel oppikken. Deze leerlingen maken nog minder oefenopgaven. Zo komt er tijd vrij om aan uitdagende opgaven te werken.

Getal en Ruimte online
Alle opgaven kunnen ook digitaal worden gemaakt. Daarbij krijgt de leerling zoveel mogelijk gepaste feedback. Ook kan de leerling in de digitale omgeving uitwerkingen bekijken.
Het docentenmateriaal bevat per hoofdstuk een studiewijzer waarin bovendien de routes overzichtelijk zijn weergegeven. De studiewijzer kan naar eigen inzicht worden aangepast. Verder is presentatiemateriaal aanwezig en zijn bij elk hoofdstuk toetsopgaven opgenomen. Behalve een bundel waaruit zelf een toets is samen te stellen, is ook een kant en klare toets (voor ongeveer 75 minuten) opgenomen. In het online materiaal voor de leerlingen staat bij elk hoofdstuk een oefentoets.

Zoals altijd stellen we op- en aanmerkingen van gebruikers zeer op prijs.

zomer 2020

Legenda

1 **Voorkennis**
Kennis van enkele onderwerpen uit een voorgaand hoofdstuk die je paraat moet hebben.

02 **Oriëntatie-opgave**
Opgave waarmee je je oriënteert op de theorie erna.

3 **Gewone opgave**
Na de theorie ga je oefenen met de gewone opgaven.

R4 **Reflectie-opgave**
In een reflectie-opgave kijk je nog eens terug op een voorgaand probleem.

A5 **Afsluitende opgave**
De afsluitende opgaven geven het beoogde beheersingsniveau aan.

E6 **Extra opgave**
Opgaven waarmee je extra wordt uitgedaagd.

Route-aanduiding

1 Basisroute

2 Middenroute

3 Uitdagende route

NB De symbolen van de route-aanduiding kunnen in combinaties voorkomen.

1 **Opgaven zonder route-aanduiding**
In de Diagnostische toets en in de Gemengde opgaven hebben opgaven geen route-aanduiding.

[▸ GR] Verwijzing naar een module van de GR-handleiding.

[▸ WERKBLAD] Verwijzing naar een werkblad.

Inhoud

9

Exponentiële en logaritmische functies

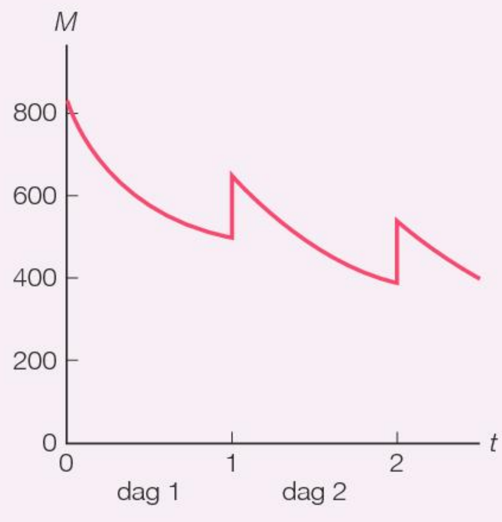
Wat leer je?

- De rekenregels voor logaritmen gebruiken.
- Groeipercentages omzetten naar een andere tijdseenheid.
- Rekenen met verdubbelingstijden en halveringstijden.
- Werken met e-machten en natuurlijke logaritmen.
- Exponentiële en logaritmische functies differentiëren.

Beginopdracht Medicijnspiegel

Bij sommige medicijnen moet een spiegel worden opgebouwd. Dat wil zeggen dat er in het bloed voortdurend een zekere concentratie van de werkzame stof aanwezig moet zijn voor een optimale werking. Is deze concentratie te laag, dan is de werking niet voldoende. Maar is de concentratie te hoog, dan kan dit allerlei vervelende bijwerkingen geven.
Je bekijkt in deze opdracht de situatie dat er in het lichaam tussen 500 en 650 mg van een medicijn aanwezig moet zijn voor een optimale werking. De hoeveelheid medicijn mag dus niet zakken onder 500 mg en niet komen boven 650 mg. Het is wel toegestaan dat in het begin een oplaaddosis wordt ingenomen die meer is dan 650 mg. Deze moet wel minder zijn dan 1000 mg.
Het medicijn wordt door het lichaam afgebroken en ook neemt de hoeveelheid medicijn in het lichaam af door uitscheiding. Elk etmaal verdwijnt 40% van het medicijn en deze afname verloopt exponentieel.
Je onderzoekt verschillende procedures van medicijninname. Een procedure is juist als er op den duur steeds tussen 500 en 650 mg medicijn in het lichaam aanwezig is.

We bekijken eerst de volgende procedure.
De patiënt neemt één keer per dag het medicijn in en begint met een oplaaddosis van 830 mg. Daarna neemt de patiënt steeds 24 uur later een onderhoudsdosis van 150 mg.
In de figuur hiernaast zie je het verloop van de hoeveelheid medicijn M in het lichaam uitgezet tegen de tijd t in dagen.
Het is duidelijk dat deze procedure niet juist is.
- Onderzoek of er bij inname van één keer per etmaal wel een juiste procedure mogelijk is.



Het medicijn kan ook twee keer per etmaal worden ingenomen. Een exponentiële afname met groeifactor 0,6 per etmaal komt overeen met een afname van 22,5% per 12 uur.
- Controleer dit percentage met een berekening.
- Onderzoek of er een juiste procedure mogelijk is waarbij de patiënt na een oplaaddosis eens per 12 uur een vaste hoeveelheid van het medicijn inneemt.

Er wordt besloten dat de patiënt drie keer per etmaal (dus om de acht uur) een vaste hoeveelheid van het medicijn moet innemen.
- Onderzoek hoeveel mg per keer de patiënt moet innemen. Geef ook een advies voor de oplaaddosis.

Voorkennis De logaritme

Theorie A Logaritmen

${}^{2}\log(32)$ is de exponent van een macht met grondtal 2 waarmee de macht gelijk is aan 32.
Omdat $32 = 2^5$, is ${}^{2}\log(32) = 5$.
Je noteert ${}^{2}\log(32) = {}^{2}\log(2^5) = 5$.
En zo is ${}^{5}\log(\frac{1}{125}) = {}^{5}\log(5^{-3}) = -3$ en ${}^{\frac{1}{3}}\log(9) = {}^{\frac{1}{3}}\log((\frac{1}{3})^{-2}) = -2$.

Algemeen geldt:

${}^{g}\log(g^a) = a$

Voor het oplossen van logaritmische vergelijkingen gebruik je de volgende regel.

Uit ${}^{g}\log(x) = y$ volgt $x = g^y$.

Dus
${}^{2}\log(x) = 4$ geeft $x = 2^4 = 16$,
${}^{\frac{1}{2}}\log(x) = -3$ geeft $x = (\frac{1}{2})^{-3} = 8$ en
${}^{3}\log(2x - 5) = 0$ geeft

$$\begin{aligned} 2x - 5 &= 3^0 \\ 2x - 5 &= 1 \\ 2x &= 6 \\ x &= 3 \end{aligned}$$

1 Bereken.

- **a** ${}^{2}\log(64)$
- **b** ${}^{3}\log(\frac{1}{27})$
- **c** ${}^{6}\log(6\sqrt{6})$
- **d** ${}^{\frac{1}{3}}\log(1)$
- **e** ${}^{\frac{1}{2}}\log(\frac{1}{8})$
- **f** ${}^{3}\log(\frac{1}{9}\sqrt{3})$

2 Los exact op.

- **a** ${}^{3}\log(x) = 5$
- **b** ${}^{2}\log(3x + 7) = 4$
- **c** $5 + {}^{5}\log(x + 3) = 7$
- **d** ${}^{\frac{1}{2}}\log(3x + 4) = -2$
- **e** $3 + {}^{2}\log(5 - 1\frac{1}{2}x) = 0$
- **f** $4 - 2 \cdot {}^{3}\log(x) = 3$

9.1 Rekenregels voor logaritmen

01 Voor $a > 0$ is $2^{^2\log(a)} = a$.

a Licht dit toe.

b $2^{^2\log(a)} = a$ is een voorbeeld van de regel $g^{^g\log(x)} = x$.
Licht toe hoe deze regel ook volgt uit ${}^g\log(x) = y$ geeft $x = g^y$.

Theorie A Herleiden van logaritmen

De formule $g^{^g\log(x)} = x$ van opgave 1 gebruiken we om de **rekenregels voor logaritmen** te bewijzen.

Voor $g > 0$, $g \neq 1$, $a > 0$ en $b > 0$ geldt

$${}^g\log(a) + {}^g\log(b) = {}^g\log(ab)$$

$${}^g\log(a) - {}^g\log(b) = {}^g\log\left(\frac{a}{b}\right)$$

$$p \cdot {}^g\log(a) = {}^g\log(a^p)$$

De rekenregel ${}^g\log(a) + {}^g\log(b) = {}^g\log(ab)$ bewijs je als volgt met behulp van de rekenregels voor machten en $g^{^g\log(x)} = x$.

$g^{^g\log(a) + {}^g\log(b)} = g^{^g\log(a)} \cdot g^{^g\log(b)} = a \cdot b = g^{^g\log(ab)}$, dus
${}^g\log(a) + {}^g\log(b) = {}^g\log(ab)$.

$g^A = g^B$ geeft $A = B$

De andere rekenregels bewijs je in opgave 6.

Om een getal als logaritme te schrijven, gebruik je $a = {}^g\log(g^a)$.
Zo is 5 bijvoorbeeld te schrijven als ${}^2\log(2^5)$.
Het is gebruikelijk om bij ${}^{10}\log$ het grondtal 10 niet te noteren.
Dus $\log(10\,000) = \log(10^4) = 4$ en $-2 = \log(10^{-2}) = \log(\frac{1}{100})$.

${}^{10}\log(a) = \log(a)$

INFORMATIEF

Definities van logaritme

Je weet ${}^g\log(x) = y$ betekent $x = g^y$. Hieruit volgt ${}^g\log(g^y) = y$ en ook $g^{^g\log(x)} = x$.
In deze opzet is ${}^g\log(x) = y$ betekent $x = g^y$ als definitie gekozen.
Omdat de andere twee formules hieraan gelijkwaardig zijn, is het ook mogelijk om elk van deze twee als definitie te nemen.
Vervolgopleidingen nemen meestal $g^{^g\log(x)} = x$ als definitie van logaritme.

Voorbeeld

a Herleid $1 + 2 \cdot {}^3\log(5)$ tot één logaritme.
b Herleid $4 - 3 \cdot \log(2)$ tot één logaritme.
c Schrijf $2 \cdot {}^2\log(800)$ in de vorm $a + {}^2\log(b)$ met a een zo groot mogelijk geheel getal en b geheel.

Uitwerking

a $1 + 2 \cdot {}^3\log(5) = {}^3\log(3) + {}^3\log(5^2) = {}^3\log(3) + {}^3\log(25) =$
${}^3\log(3 \cdot 25) = {}^3\log(75)$
b $4 - 3 \cdot \log(2) = \log(10^4) - \log(2^3) = \log(10\,000) - \log(8) =$
$\log(\frac{10\,000}{8}) = \log(1250)$
c $2 \cdot {}^2\log(800) = 2 \cdot {}^2\log(32 \cdot 25) = 2 \cdot ({}^2\log(32) + {}^2\log(25)) =$
$2 \cdot (5 + {}^2\log(25)) = 10 + 2 \cdot {}^2\log(25) = 10 + {}^2\log(25^2) =$
$10 + {}^2\log(625)$

R2 Zie voorbeeld c.
Schrijf $2 \cdot {}^2\log(800)$ in de vorm $p + q \cdot {}^2\log(r)$ met p een zo groot mogelijk geheel getal en r een zo klein mogelijk geheel getal.

3 Herleid tot één logaritme.

a ${}^2\log(6) + {}^2\log(10)$
b ${}^3\log(30) - {}^3\log(6)$
c $2 \cdot {}^5\log(3) + {}^5\log(\frac{1}{2})$
d ${}^{\frac{1}{2}}\log(15) - 4 \cdot {}^{\frac{1}{2}}\log(3)$
e $-2 \cdot {}^4\log(6) + {}^4\log(12)$
f $\log(50) - 2 \cdot \log(5)$

4 Herleid tot één logaritme.

a $4 + {}^2\log(3)$
b $3 - {}^{\frac{1}{2}}\log(10)$
c $2 - \log(5)$
d ${}^2\log(12) - {}^3\log(9)$
e $\frac{1}{2} \cdot {}^3\log(16) + {}^{\frac{1}{2}}\log(8)$
f $\log(500) - {}^5\log(125)$

5 Bereken exact.

a ${}^3\log(6) + {}^3\log(1\frac{1}{2})$
b ${}^5\log(2) - {}^5\log(50)$
c ${}^2\log(27) + 3 \cdot {}^2\log(\frac{1}{6})$
d $2 \cdot {}^4\log(6) - 2 \cdot {}^4\log(3)$

6 Vul in.

a $g^{{}^g\log(a) - {}^g\log(b)} = \dfrac{g^{\cdots}}{g^{\cdots}} = \dfrac{\cdots}{\cdots} = g^{\cdots}$, dus ${}^g\log(a) - {}^g\log(b) = {}^g\log\left(\dfrac{a}{b}\right)$.
b $g^{p \cdot {}^g\log(a)} = (g^{\cdots})^{\cdots} = \ldots = g^{\cdots}$, dus $p \cdot {}^g\log(a) = {}^g\log(a^p)$.

A7 Herleid tot één logaritme.

a ${}^2\log(a) + 3 \cdot {}^2\log(b)$
b $5 \cdot {}^3\log(a) - 2 \cdot {}^3\log(b)$
c $2 + {}^5\log(a)$
d $2 - {}^3\log(a)$
e ${}^6\log(a) - 1$
f $2 \cdot {}^5\log(b) + \frac{1}{2} \cdot {}^5\log(a)$

A8 Schrijf in de vorm $a + {}^g\log(b)$ met a een zo groot mogelijk geheel getal en b geheel.

a $\log(600)$
b ${}^2\log(24)$
c $4 \cdot {}^3\log(54)$
d $2 \cdot {}^5\log(1250)$
e $\log(1600) - 1$
f $7 + {}^2\log(1600)$

9 De grafiek van de functie $f(x) = {}^3\log(x)$ wordt ten opzichte van de y-as met 81 vermenigvuldigd. Zo ontstaat de grafiek van de functie g.
Het functievoorschrift van g kan geschreven worden in de vorm $g(x) = a + {}^3\log(x)$.

a Bereken a.
b Met welke translatie van de grafiek van f had je de grafiek van g ook kunnen krijgen?

A10
a Welke translatie levert bij de grafiek van de functie $f(x) = {}^2\log(x)$ dezelfde beeldgrafiek op als de vermenigvuldiging ten opzichte van de y-as met $\frac{1}{32}$?
b Welke vermenigvuldiging ten opzichte van de y-as levert bij de grafiek van $f(x) = {}^2\log(x)$ dezelfde beeldgrafiek op als de translatie $(0, 3)$?

A11 De grafiek van de functie g ontstaat uit de grafiek van de functie $f(x) = {}^2\log(x)$ bij de translatie $(3, 0)$ gevolgd door de vermenigvuldiging ten opzichte van de y-as met $\frac{1}{4}$.
Het functievoorschrift van g is te schrijven in de vorm $g(x) = p + {}^2\log(x + q)$.
Bereken p en q.

A12 Op de grafiek van de functie $f(x) = 3^x$ wordt eerst de translatie $(a, 0)$ toegepast en vervolgens de vermenigvuldiging ten opzichte van de y-as met b. Hierdoor ontstaat de grafiek van de functie $g(x) = 81 \cdot 27^x$.
Op de grafiek van de functie $h(x) = {}^3\log(x)$ wordt dezelfde transformatie toegepast als op de grafiek van f. Hierdoor ontstaat de grafiek van de functie k. Het functievoorschrift van k is te schrijven in de vorm $k(x) = p + {}^3\log(x + q)$.
Bereken p en q.

O13 Gegeven is de vergelijking ${}^2\log(x + 1) = 3 + {}^2\log(3)$.

a Herleid $3 + {}^2\log(3)$ tot één logaritme.
b Los de vergelijking ${}^2\log(x + 1) = 3 + {}^2\log(3)$ exact op.

Theorie B Vergelijkingen van de vorm ${}^g\log(A) = {}^g\log(B)$

Bij het exact oplossen van **logaritmische vergelijkingen** zoals ${}^2\log(x + 1) = 3 + {}^2\log(3)$ in opgave 13, werk je toe naar een vorm waarin het linker- en rechterlid als logaritme met hetzelfde grondtal zijn geschreven. Daarna gebruik je:

${}^g\log(A) = {}^g\log(B)$ geeft $A = B$

Om toe te werken naar de vorm ${}^g\log(A) = {}^g\log(B)$ gebruik je de rekenregels voor logaritmen.
Bij de vergelijking ${}^2\log(x + 1) + {}^2\log(x - 1) = {}^2\log(2x + 7)$ krijg je
${}^2\log((x + 1)(x - 1)) = {}^2\log(2x + 7)$
${}^2\log(x^2 - 1) = {}^2\log(2x + 7)$
$x^2 - 1 = 2x + 7$
$x^2 - 2x - 8 = 0$
$(x + 2)(x - 4) = 0$
$x = -2 \vee x = 4$
Invullen van $x = -2$ in de oorspronkelijke vergelijking geeft ${}^2\log(-1) + {}^2\log(-3) = {}^2\log(3)$. Omdat ${}^2\log(-1)$ en ${}^2\log(-3)$ niet gedefinieerd zijn, is $x = -2$ geen oplossing.
Invullen van $x = 4$ geeft ${}^2\log(5) + {}^2\log(3) = {}^2\log(15)$ en dit klopt.
Dus $x = 4$ voldoet.
Door de rekenregels voor logaritmen te gebruiken is een oplossing ingevoerd. Controleer daarom bij het oplossen van logaritmische vergelijkingen of de gevonden waarden van x voldoen. Het is daarvoor voldoende om na te gaan of de logaritmen voor de gevonden waarden gedefinieerd zijn.

Afspraak bij het oplossen van vergelijkingen
In het geval een gevonden waarde niet voldoet, noteer je vold. niet.

Voorbeeld

Los exact op.

a ${}^{3}\log(x-2) = 1 + 4 \cdot {}^{3}\log(2)$

b $1 + 2 \cdot {}^{2}\log(x) = {}^{2}\log(5x+3)$

Uitwerking

a ${}^{3}\log(x-2) = 1 + 4 \cdot {}^{3}\log(2)$

${}^{3}\log(x-2) = {}^{3}\log(3) + {}^{3}\log(2^4)$

${}^{3}\log(x-2) = {}^{3}\log(3) + {}^{3}\log(16)$

${}^{3}\log(x-2) = {}^{3}\log(3 \cdot 16)$

${}^{3}\log(x-2) = {}^{3}\log(48)$

$x - 2 = 48$

$x = 50$

b $1 + 2 \cdot {}^{2}\log(x) = {}^{2}\log(5x+3)$

${}^{2}\log(2) + {}^{2}\log(x^2) = {}^{2}\log(5x+3)$

${}^{2}\log(2x^2) = {}^{2}\log(5x+3)$

$2x^2 = 5x + 3$

$2x^2 - 5x - 3 = 0$

$D = (-5)^2 - 4 \cdot 2 \cdot -3 = 49$

$x = \dfrac{5+7}{4} = 3 \vee x = \dfrac{5-7}{4} = -\frac{1}{2}$

vold. niet

Dat $x = 3$ voldoet hoef je niet te noteren.

14 Los exact op.

a ${}^{5}\log(x) = 3 \cdot {}^{5}\log(2) - 2 \cdot {}^{5}\log(3)$

b ${}^{2}\log(x) = 4 - {}^{2}\log(3)$

c ${}^{2}\log(x+3) = 3 + {}^{2}\log(x)$

d ${}^{3}\log(2x) = 1 + {}^{3}\log(x+1)$

15 Bereken exact de oplossingen.

a $5 \cdot \log(x) = 5 - \log(3125)$

b ${}^{\frac{1}{2}}\log(2x-1) = 2 + {}^{\frac{1}{2}}\log(x+2)$

c ${}^{3}\log(x+2) = 1 - {}^{3}\log(x)$

d $2 \cdot {}^{3}\log(x) + 1 = {}^{3}\log(5x-2)$

A16 Los exact op.

a ${}^{5}\log(x) = 2 + \frac{1}{2} \cdot {}^{5}\log(3)$

b ${}^{3}\log(x+4) + 1 = 2 \cdot {}^{3}\log(x-2)$

c ${}^{2}\log(2x) - {}^{2}\log(x+3) = {}^{2}\log(x) - 2$

d ${}^{3}\log(x) = 2 - {}^{3}\log(x-1)$

A17 *

De grafiek van de functie $f(x) = {}^2\log(x)$ wordt eerst vermenigvuldigd ten opzichte van de x-as met a en vervolgens vermenigvuldigd ten opzichte van de y-as met b. Hierdoor ontstaat de grafiek van de functie $g(x) = -5 + 10 \cdot {}^2\log(x)$.
Bereken a en b.

O18

In deze opgave bewijs je de regel ${}^g\log(a) = \dfrac{{}^p\log(a)}{{}^p\log(g)}$.
Ga uit van $p^{{}^p\log(g)} = g$ en verhef het linker- en rechterlid tot de macht ${}^g\log(a)$. Je krijgt $p^{{}^p\log(g) \cdot {}^g\log(a)} = a$.

a Toon dit aan.

b Schrijf a als macht met grondtal p en maak het bewijs af.

Theorie C Overgaan op ander grondtal

In opgave 18 heb je de regel ${}^g\log(a) = \dfrac{{}^p\log(a)}{{}^p\log(g)}$ bewezen.

Met deze regel ga je over van het grondtal g op het grondtal p.

Zo is ${}^2\log(5) = \dfrac{{}^6\log(5)}{{}^6\log(2)}$, maar bijvoorbeeld ook ${}^2\log(5) = \dfrac{\log(5)}{\log(2)}$.

Ga je bij ${}^{\frac{1}{3}}\log(x)$ over op grondtal 3, dan krijg je

$${}^{\frac{1}{3}}\log(x) = \frac{{}^3\log(x)}{{}^3\log(\frac{1}{3})} = \frac{{}^3\log(x)}{{}^3\log(3^{-1})} = \frac{{}^3\log(x)}{-1} = -{}^3\log(x).$$

Algemeen is ${}^{\frac{1}{g}}\log(x) = \dfrac{{}^g\log(x)}{{}^g\log(\frac{1}{g})} = \dfrac{{}^g\log(x)}{{}^g\log(g^{-1})} = \dfrac{{}^g\log(x)}{-1} = -{}^g\log(x)$.

$${}^g\log(a) = \frac{{}^p\log(a)}{{}^p\log(g)} \text{ en } {}^{\frac{1}{g}}\log(a) = -{}^g\log(a)$$

Je kunt nu de vergelijking ${}^3\log(x+1) = {}^3\log(5) - {}^{\frac{1}{3}}\log(x)$ exact oplossen.
Dat gaat als volgt.

${}^3\log(x+1) = {}^3\log(5) - {}^{\frac{1}{3}}\log(x)$
${}^3\log(x+1) = {}^3\log(5) + {}^3\log(x)$
${}^3\log(x+1) = {}^3\log(5x)$
$x + 1 = 5x$
$-4x = -1$
$x = \frac{1}{4}$

Bij het exact oplossen van de vergelijking ${}^4\log(x) = {}^2\log(x-2)$ ga je bij ${}^4\log(x)$ over op grondtal 2. Zie het voorbeeld op de volgende bladzijde.

Voorbeeld

Los exact op.

a $2 \cdot {}^2\log(x) + {}^{\frac{1}{2}}\log(x + 6) = 0$

b ${}^4\log(x) = {}^2\log(x - 2)$

Uitwerking

a $2 \cdot {}^2\log(x) + {}^{\frac{1}{2}}\log(x + 6) = 0$

${}^2\log(x^2) - {}^2\log(x + 6) = 0$

${}^2\log(x^2) = {}^2\log(x + 6)$

$x^2 = x + 6$

$x^2 - x - 6 = 0$

$(x + 2)(x - 3) = 0$

$x = -2 \quad \vee \quad x = 3$

vold. niet

b ${}^4\log(x) = {}^2\log(x - 2)$

$\dfrac{{}^2\log(x)}{{}^2\log(4)} = {}^2\log(x - 2)$

$\dfrac{{}^2\log(x)}{2} = {}^2\log(x - 2)$

${}^2\log(x) = 2 \cdot {}^2\log(x - 2)$

${}^2\log(x) = {}^2\log((x - 2)^2)$

$x = (x - 2)^2$

$x = x^2 - 4x + 4$

$x^2 - 5x + 4 = 0$

$(x - 1)(x - 4) = 0$

$x = 1 \quad \vee \quad x = 4$

vold. niet

R19 Je kunt de vergelijking van voorbeeld b ook oplossen door direct af te stappen van de logaritmen. Stel ${}^4\log(x) = a$ en ${}^2\log(x - 2) = b$. Er geldt dan $a = b$, $x = 4^a$ en $x = 2^b + 2$.

a Licht dit toe.

b Gebruik $a = b$, $x = 4^a$ en $x = 2^b + 2$ om de vergelijking van voorbeeld b op te lossen.

INFORMATIEF

Napier

De Schotse landheer John Napier (1550-1617) heeft het begrip logaritme ingevoerd. Bij het zoeken naar een methode om het vermenigvuldigen van getallen te vereenvoudigen, kwam hij op het idee om met exponenten te werken, waardoor bijvoorbeeld de vermenigvuldiging 32×256 is om te zetten in de optelling van de exponenten 5 en 8, immers $32 \times 256 = 2^5 \times 2^8 = 2^{5+8} = 2^{13}$.

Om deze rekenmethode zinvol te kunnen toepassen, heeft Napier lange tabellen gemaakt van getallen met de bijbehorende exponenten van machten met het grondtal 2, ook voor minder mooie getallen. Na jaren rekenwerk publiceerde hij in 1614 deze exponenten die hij logaritmen noemde.

20 Los exact op.

a ${}^{3}\log(3x-5)+{}^{\frac{1}{3}}\log(x-1)=0$

b ${}^{5}\log(3x)+2\cdot{}^{\frac{1}{5}}\log(x)=0$

c $2x\cdot{}^{\frac{1}{3}}\log(3x+5)={}^{\frac{1}{3}}\log(3x+5)$

d ${}^{2}\log(x)={}^{4}\log(x+20)$

A21 Los exact op.

a $-2\cdot{}^{\frac{1}{2}}\log(x)=2+{}^{2}\log(3-x)$

b ${}^{9}\log(2x)={}^{3}\log(x-4)$

c $4x\cdot{}^{4}\log(2x-1)+3\cdot{}^{4}\log(2x-1)=0$

d $x^2\cdot{}^{5}\log(2x+1)+9\cdot{}^{\frac{1}{5}}\log(2x+1)=0$

22 Gegeven is de vergelijking ${}^{3}\log^2(x)=2\cdot{}^{3}\log(x)+15$.
Deze vergelijking los je op met de substitutie ${}^{3}\log(x)=u$.
Hiermee krijg je $u=-3$ en $u=5$.
Toon dit aan en geef de oplossing van de gegeven vergelijking.

Met ${}^{3}\log^2(x)$ wordt $({}^{3}\log(x))^2$ bedoeld.

A23 Los exact op.

a ${}^{2}\log^2(x)=2\cdot{}^{2}\log(x)+3$

b ${}^{\frac{1}{2}}\log^2(x+2)+3\cdot{}^{\frac{1}{2}}\log(x+2)=0$

c $2\cdot{}^{3}\log^2(x)+2=5\cdot{}^{3}\log(x)$

d ${}^{5}\log^2(x)+3\cdot{}^{\frac{1}{5}}\log(x)+2=0$

Terugblik

Rekenregels voor logaritmen

$^{g}\log(a) + {}^{g}\log(b) = {}^{g}\log(ab)$ $\qquad$ $^{g}\log(a) = \dfrac{^{p}\log(a)}{^{p}\log(g)}$

$^{g}\log(a) - {}^{g}\log(b) = {}^{g}\log\left(\dfrac{a}{b}\right)$ $\qquad$ $^{\frac{1}{g}}\log(a) = -{}^{g}\log(a)$

$p \cdot {}^{g}\log(a) = {}^{g}\log(a^{p})$

$g^{^{g}\log(a)} = a$ en
$^{g}\log(g^{a}) = a$

Met deze rekenregels is bijvoorbeeld
$\log(100) + 4 \cdot {}^{2}\log(3) + {}^{\frac{1}{2}}\log(6)$ te herleiden tot één logaritme. Je krijgt
$2 + {}^{2}\log(3^{4}) - {}^{2}\log(6) = {}^{2}\log(4) + {}^{2}\log(81) - {}^{2}\log(6) =$
$^{2}\log\left(\dfrac{4 \cdot 81}{6}\right) = {}^{2}\log(54)$.
Je kunt $^{2}\log(54)$ schrijven in de vorm $a + {}^{2}\log(b)$ met a een zo groot mogelijk geheel getal en b geheel. Je krijgt
$^{2}\log(54) = {}^{2}\log(2 \cdot 27) = {}^{2}\log(2) + {}^{2}\log(27) = 1 + {}^{2}\log(27)$.

$^{10}\log(a) = \log(a)$

Logaritmische vergelijkingen oplossen

- $^{g}\log(A) = B$ geeft $A = g^{B}$
- $^{g}\log(A) = {}^{g}\log(B)$ geeft $A = B$

Controleer bij logaritmische vergelijkingen of voor de gevonden waarden de logaritmen van de oorspronkelijke vergelijking bestaan.

Vergelijkingen zoals $^{2}\log(x - 2) = 3 - {}^{2}\log(x)$

$^{2}\log(x - 2) = 3 - {}^{2}\log(x)$
$^{2}\log(x - 2) + {}^{2}\log(x) = 3$
$^{2}\log(x(x - 2)) = 3$
$x(x - 2) = 2^{3}$
$x^{2} - 2x = 8$
$x^{2} - 2x - 8 = 0$
$(x + 2)(x - 4) = 0$
$x = -2 \ \vee \ x = 4$
vold. niet

Vergelijkingen zoals $^{5}\log^{2}(x) + {}^{5}\log(x) - 2 = 0$

$^{5}\log^{2}(x) + {}^{5}\log(x) - 2 = 0$
Stel $^{5}\log(x) = u$.
$u^{2} + u - 2 = 0$
$(u - 1)(u + 2) = 0$
$u = 1 \vee u = -2$
$^{5}\log(x) = 1 \vee {}^{5}\log(x) = -2$
$x = 5 \vee x = \frac{1}{25}$

Vergelijkingen zoals $^{2}\log(x) = {}^{4}\log(x + 12)$

$^{2}\log(x) = {}^{4}\log(x + 12)$
$^{2}\log(x) = \dfrac{^{2}\log(x + 12)}{^{2}\log(4)}$
$^{2}\log(x) = \dfrac{^{2}\log(x + 12)}{2}$
$2 \cdot {}^{2}\log(x) = {}^{2}\log(x + 12)$
$^{2}\log(x^{2}) = {}^{2}\log(x + 12)$
$x^{2} = x + 12$
$x^{2} - x - 12 = 0$
$(x + 3)(x - 4) = 0$
$x = -3 \ \vee \ x = 4$
vold. niet

9.2 Exponentiële en logaritmische formules

O24 Een bedrag B in euro's neemt elk jaar met 5% toe. Op 1 januari 2020 is het bedrag 1000 euro.

a Hoeveel is het bedrag op 1 januari 2021? En op 1 januari 2025?

b Bij B hoort een formule van de vorm $B = 1000 \cdot g^t$. Hierin is t de tijd in jaren met $t = 0$ op 1 januari 2020.
Welk getal is g?

c Met hoeveel procent neemt het bedrag toe in de periode 1 januari 2020-1 januari 2025?

Theorie A Groeifactoren en groeipercentages

In opgave 24 neemt het bedrag jaarlijks met 5% toe. Er is sprake van **exponentiële groei** met een **groeipercentage** van 5% per jaar. Bij een groeipercentage van 5% per jaar hoort een **groeifactor** van 1,05 per jaar.

Bij exponentiële groei
- **wordt de hoeveelheid per tijdseenheid met hetzelfde getal vermenigvuldigd, dit getal heet de groeifactor per tijdseenheid**
- **hoort een formule van de vorm $N = b \cdot g^t$, hierin is g de groeifactor per tijdseenheid en b de beginhoeveelheid.**

Bij de formule $N = b \cdot g^t$ onderscheiden we twee gevallen.
- $g > 1$
  De grafiek is stijgend.
- $0 < g < 1$
  De grafiek is dalend. Ook in dit geval spreken we van exponentiële groei, hoewel de namen **exponentieel verval** en **exponentiële afname** ook worden gebruikt.

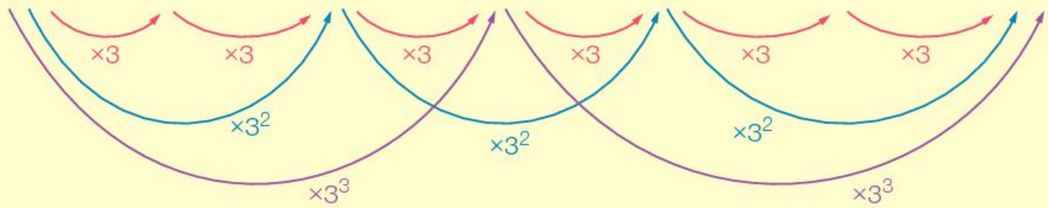
> $g \leq 0$ laten we buiten beschouwing.
> b is de beginhoeveelheid, dus $b > 0$.

Neemt een bedrag per jaar met 8% toe, dan is de groeifactor 1,08 per jaar. Immers 100% + 8% = 108%, dus vermenigvuldigen met 1,08.
We noteren dit kort als $g_{\text{jaar}} = 1{,}08$.
Weet je omgekeerd dat de groeifactor per jaar 1,238 is, dan heb je te maken met een procentuele toename van $(1{,}238 - 1) \cdot 100\% = 23{,}8\%$ per jaar.
Bij een jaarlijkse afname met 8,6% is de groeifactor 0,914 per jaar, want $100\% - 8{,}6\% = 91{,}4\%$, dus vermenigvuldigen met 0,914.
Omgekeerd hoort bij een groeifactor van 0,982 per jaar een procentuele verandering van −1,8%, dus een afname van 1,8% per jaar.
Je kunt groeifactoren en groeipercentages omzetten naar een andere tijdseenheid. Op de volgende bladzijde zie je hoe dat gaat.

Een hoeveelheid groeit exponentieel met beginwaarde 100 en groeifactor 3 per uur.

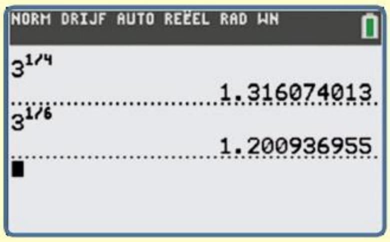
EXPONENTIËLE GROEI

t	0	1	2	3	4	5	6
N	100	$100 \cdot 3^1$ $= 300$	$100 \cdot 3^2$ $= 900$	$100 \cdot 3^3$ $= 2700$	$100 \cdot 3^4$ $= 8100$	$100 \cdot 3^5$ $= 24\,300$	$100 \cdot 3^6$ $= 72\,900$



Je ziet per 2 uur is de groeifactor 3^2
per 3 uur is de groeifactor 3^3
⋮
per n uur is de groeifactor 3^n

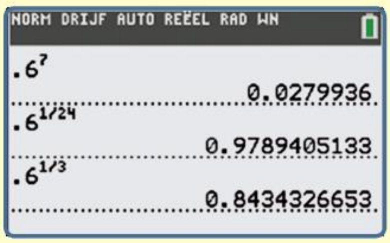
Deze regel geldt ook voor niet-gehele waarden van n.
Zo geldt dat per kwartier de groeifactor $3^{\frac{1}{4}} \approx 1{,}316$ is,
immers $g_{\text{kwartier}} = 3^{\frac{1}{4}}$ geeft $g_{\text{uur}} = (3^{\frac{1}{4}})^4 = 3$.
Per tien minuten is de groeifactor $3^{\frac{1}{6}} \approx 1{,}201$,
immers $g_{10\text{ minuten}} = 3^{\frac{1}{6}}$ geeft $g_{\text{uur}} = (3^{\frac{1}{6}})^6 = 3$.



Bij exponentiële groei met groeifactor g per tijdseenheid is de groeifactor per n tijdseenheden gelijk aan g^n.

Heb je te maken met een exponentiële groei met een groeifactor van 0,6 per dag, dan is

- de groeifactor per week $0{,}6^7 \approx 0{,}028$
- de groeifactor per uur $0{,}6^{\frac{1}{24}} \approx 0{,}979$
- de groeifactor per acht uur $0{,}6^{\frac{1}{3}} \approx 0{,}843$.



Om te berekenen wat het groeipercentage per dag is bij een toename van 70% per week, ga je als volgt te werk.
$g_{\text{week}} = 1{,}70$
$g_{\text{dag}} = 1{,}70^{\frac{1}{7}} \approx 1{,}079$
Het groeipercentage per dag is 7,9%.

Bij exponentiële groei gaat het omzetten van een groeipercentage naar een andere tijdseenheid via groeifactoren.

Voorbeeld

Een hoeveelheid neemt per zes uur met 18% toe.

a Hoeveel procent is de toename per dag?
b Hoeveel procent is de toename per uur?

Uitwerking

a $g_{6\text{ uur}} = 1{,}18$
$g_{\text{dag}} = 1{,}18^4 \approx 1{,}939$
De toename is 93,9% per dag.

b $g_{6\text{ uur}} = 1{,}18$
$g_{\text{uur}} = 1{,}18^{\frac{1}{6}} \approx 1{,}028$
De toename is 2,8% per uur.

25

a Een hoeveelheid neemt per jaar met 12,7% toe.
Geef de groeifactor per jaar.
b Een hoeveelheid neemt per maand met 6,8% af.
Geef de groeifactor per maand.
c Bij een exponentiële groei is de groeifactor 1,735 per maand.
Geef het groeipercentage per maand.
d Bij een exponentiële groei is de groeifactor 0,845 per dag.
Met hoeveel procent neemt de hoeveelheid per dag af?
e Bij een exponentiële groei is de groeifactor 2,42 per jaar.
Geef het groeipercentage per jaar.
f Een hoeveelheid neemt per dag met 0,7% af.
Geef de groeifactor per dag.

26 Een hoeveelheid neemt per kwartier met 12% toe.

a Hoeveel procent is de toename per uur?
b Hoeveel is de procentuele toename per vijf minuten?
c Hoeveel procent is de toename per vijf uur? Rond af op gehelen.

Rond percentages af op één decimaal en rond groeifactoren af op drie decimalen, tenzij anders gevraagd.

27 Bij een exponentiële groei hoort een groeifactor van 1,3 per dag.

a Bereken het groeipercentage per week. Rond af op gehelen.
b Bereken het groeipercentage per vier uur.

28 Een hoeveelheid neemt per dag met 16% af.

a Bereken de groeifactor per week.
b Met hoeveel procent neemt de hoeveelheid per uur af?
c Bereken het groeipercentage per kwartier. Rond af op twee decimalen.

29

a Een hoeveelheid neemt per uur met 19,5% af.
Hoeveel procent is de afname per kwartier?

b Een hoeveelheid neemt per jaar met 8,6% toe.
Hoeveel procent is de toename per 25 jaar? Rond af op gehelen.

c Een hoeveelheid neemt per week met 180% toe.
Bereken de groeifactor per dag.

30

Een hoeveelheid N neemt exponentieel toe. Op $t = 3$ is $N = 1600$ en op $t = 10$ is $N = 4100$. Hierbij is t in uren.

Er geldt $g_{7\text{ uur}} = \frac{4100}{1600}$.

a Licht dit toe.

Uit $g_{7\text{ uur}} = \frac{4100}{1600}$ volgt $g_{\text{uur}} = 1{,}1438\ldots$

b Toon dit aan.

Op $t = 0$ is N, afgerond op tientallen, 1070.

c Toon dit aan en schrijf de formule van N op.

Rond ook bij het opstellen van een groeiformule de groeifactor af op drie decimalen, tenzij anders gevraagd.

A31

a Een bacteriesoort groeit exponentieel. Op $t = 2$ zijn er 150 miljoen bacteriën en op $t = 8$ zijn dat er 1,250 miljard. Hierbij is t in uren.
Stel de formule op van het aantal bacteriën N in miljoenen.

b Een hoeveelheid radioactieve stof neemt exponentieel af.
Op $t = 5$ is er 0,60 gram en op $t = 8$ is er 0,47 gram. Hierbij is t in dagen.
Stel de formule op van de hoeveelheid H in gram.

A32

Bij het helen van een wond blijkt de wondoppervlakte de eerste week exponentieel af te nemen.
De oppervlakte A van een wond was na drie dagen 31 mm^2 en na een week 11 mm^2.
Wat was de oppervlakte van de wond na 60 uur?

O33

Het aantal inwoners van Senegal wordt gegeven door de formule $N = 17{,}0 \cdot 1{,}031^t$.
Hierin is N in miljoenen en t de tijd in jaren met $t = 0$ op 1 januari 2019.

a Na hoeveel jaar is het aantal inwoners verdubbeld ten opzichte van 1 januari 2019?

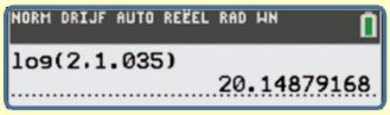
b Op 1 januari 2010 had Senegal 12,9 miljoen inwoners.
Hoeveel jaar na 1 januari 2010 is dit aantal verdubbeld? Ga uit van een groeipercentage van 3,1% per jaar.

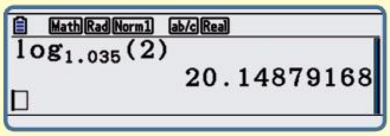
Theorie B Verdubbelingstijd en halveringstijd

De groei van een bevolking wordt vaak gegeven met een groeipercentage. De sterkte van de groei is hiermee niet voor iedereen goed in te schatten. Met de **verdubbelingstijd** krijg je een betere indruk van de groei. Bij een groei van 3,5% per jaar bereken je de verdubbelingstijd T door de vergelijking $1{,}035^T = 2$ op te lossen. Hierbij gebruik je de regel $g^x = a$ geeft $x = {}^g\log(a)$. Je krijgt $T = {}^{1{,}035}\log(2)$.
De GR heeft een toets log (TI en Casio) of LOG (HP) waarbij grondtal 10 hoort. Bij de TI en HP kun je met deze toets ook logaritmen met een ander grondtal berekenen. Voor het berekenen van ${}^{1{,}035}\log(2)$ tik je in log(2, 1.035). Bij de Casio gebruik je de optie logab uit het OPTN-CALC-menu. Je krijgt $T = {}^{1{,}035}\log(2) \approx 20{,}1$.
Dus bij een groei van 3,5% per jaar is de verdubbelingstijd iets meer dan 20 jaar.

$$b \cdot g^T = 2b \quad :b$$
$$g^T = 2$$

Dus de verdubbelingstijd is onafhankelijk van b.





De verdubbelingstijd is de tijd waarin een hoeveelheid verdubbelt bij exponentiële groei.
Bij groeifactor g bereken je de verdubbelingstijd T door de vergelijking $g^T = 2$ op te lossen.

Bij exponentiële afname is het begrip **halveringstijd** van belang.
De halveringstijd is de tijd waarin een hoeveelheid gehalveerd wordt.
Bij groeifactor g bereken je de halveringstijd T door de vergelijking $g^T = \frac{1}{2}$ op te lossen.

Voorbeeld

Een hoeveelheid neemt jaarlijks met 12% af.
Bereken de halveringstijd in maanden nauwkeurig.

Uitwerking

$g_{\text{jaar}} = 0{,}88$
$0{,}88^T = \frac{1}{2}$
$T = {}^{0{,}88}\log(\frac{1}{2}) = 5{,}422...$
De halveringstijd is 5 jaar en $0{,}422... \cdot 12 \approx 5$ maanden.

34
a Een hoeveelheid neemt jaarlijks met 13,1% toe.
Bereken de verdubbelingstijd in maanden nauwkeurig.
b Een hoeveelheid neemt wekelijks met 8,5% af.
Bereken de halveringstijd in dagen nauwkeurig.

35 a De bevolking van Oeganda neemt jaarlijks met 3,25% toe.
Bereken de verdubbelingstijd in jaren nauwkeurig.
b De bevolking van de VS groeit elke tien jaar met 8,1%.
Bereken de verdubbelingstijd in jaren nauwkeurig.

36 a Een hoeveelheid verdubbelt elke 25 jaar.
Bereken het groeipercentage per jaar.
b De radioactieve stof strontium-90 heeft een halveringstijd van 28 jaar.
Bereken met hoeveel procent de hoeveelheid radioactieve stof per jaar afneemt.

A37 De radioactieve stof jodium-131 ontstaat bij een kernexplosie.
De hoeveelheid radioactieve stof neemt met 8,3% per dag af.
a Bereken de halveringstijd.
b Na hoeveel dagen is nog 10% van de beginhoeveelheid over?

A38 Bij het zuiveren van afvalwater gebruikt men het begrip biochemisch zuurstofverbruik (BZV) als maat voor de verontreiniging van het water met organisch materiaal. In deze opgave gaan we uit van huishoudelijk afvalwater met een BZV van 300 mg/liter. Dat wil zeggen dat er 300 mg zuurstof nodig is om één liter van het afvalwater te zuiveren. Bij de zuivering van het afvalwater zal het BZV dus afnemen: hoe schoner het water, des te lager het BZV. Omdat deze zuivering door micro-organismen wordt verricht, is de afname van het BZV afhankelijk van de temperatuur. Bij lage temperaturen zijn de micro-organismen minder actief.

a Bij een temperatuur van 20 °C neemt het BZV met 19% per dag af.
Met hoeveel procent neemt het BZV per week af?
b Bij een temperatuur van 10 °C neemt het BZV met 62% per week af.
Met hoeveel procent neemt het BZV per dag af?

In een zuiveringsinstallatie vindt de zuivering plaats bij een temperatuur van 15 °C. De afname is dan 15,5% per dag.
c Stel de formule op van het BZV na t dagen zuiveren.
d Bereken in uren nauwkeurig de halveringstijd van het BZV.
e Bereken na hoeveel dagen zuiveren het BZV is afgenomen tot 10 mg/liter.

Voor de halveringstijd h in dagen van het BZV hanteert men de formule $h = 7{,}6 \cdot 0{,}96^T$. Hierin is T de temperatuur in °C.
f Controleer deze formule met een berekening voor temperaturen van 10 °C en 20 °C.

039 De formule $y = 2^{x-1}$ is om te werken tot $x = 1 + {}^2\log(y)$.
Toon dit aan.

Theorie C Exponentiële en logaritmische formules omwerken

Je kunt de formule $N = 5 \cdot 2^{t-1}$ omwerken tot een formule van de vorm $t = a + {}^2\log(cN)$. Dat gaat als volgt.

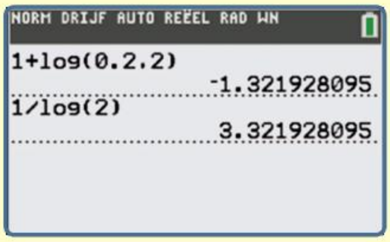
$N = 5 \cdot 2^{t-1}$ — Verwissel beide leden.
$5 \cdot 2^{t-1} = N$ — Deel beide leden door 5.
$2^{t-1} = 0{,}2N$ — Pas toe $g^x = a$ geeft $x = {}^g\log(a)$.
$t - 1 = {}^2\log(0{,}2N)$
$t = 1 + {}^2\log(0{,}2N)$

Bij het omwerken van de formule $t = 1 + {}^2\log(0{,}2N)$ tot een formule van de vorm $t = a + b \cdot \log(N)$ ga je als volgt te werk.

$t = 1 + {}^2\log(0{,}2N)$ — ${}^g\log(ab) = {}^g\log(a) + {}^g\log(b)$

$t = 1 + {}^2\log(0{,}2) + {}^2\log(N)$ — ${}^2\log(N) = \dfrac{\log(N)}{\log(2)}$

$t = 1 + {}^2\log(0{,}2) + \dfrac{\log(N)}{\log(2)}$ — $\dfrac{\log(N)}{\log(2)} = \dfrac{1}{\log(2)} \cdot \log(N)$



$t \approx -1{,}32 + 3{,}32 \cdot \log(N)$
Dus $t = -1{,}32 + 3{,}32 \cdot \log(N)$.

Je kunt de formule $y = \frac{1}{3} \cdot {}^2\log(x) - 2$ omwerken tot een formule van de vorm $x = b \cdot g^y$. Dat gaat als volgt.

$y = \frac{1}{3} \cdot {}^2\log(x) - 2$

$\frac{1}{3} \cdot {}^2\log(x) = y + 2$

${}^2\log(x) = 3y + 6$ — ${}^g\log(x) = y$ geeft $x = g^y$

$x = 2^{3y+6} = 2^{3y} \cdot 2^6 = 2^6 \cdot (2^3)^y = 64 \cdot 8^y$
Dus $x = 64 \cdot 8^y$.

Bij het omwerken van de formule $x = 64 \cdot 8^y$ tot een formule van de vorm $x = b \cdot 10^{cy}$ ga je als volgt te werk.

$x = 64 \cdot 8^y$ — $8 = 10^{\log(8)}$
$x = 64 \cdot (10^{\log(8)})^y$
$x \approx 64 \cdot (10^{0{,}903})^y$
$x \approx 64 \cdot 10^{0{,}903y}$
Dus $x = 64 \cdot 10^{0{,}903y}$.

R40 Zie de theorie.

a Werk de formule $t = 1 + {}^2\log(0{,}2N)$ om tot de vorm $t = b \cdot \log(cN)$. Rond b af op twee decimalen.

b Werk de formule $t = 1 + {}^2\log(0{,}2N)$ om tot de vorm $t = a + b \cdot {}^3\log(N)$. Rond a en b af op twee decimalen.

c Werk de formule $x = 64 \cdot 8^y$ om tot de vorm $x = b \cdot 3^{cy}$. Rond c af op drie decimalen.

41

a Werk de formule $N = 34 \cdot 3^{2t+3}$ om tot de vorm $t = a + b \cdot {}^3\log(N)$. Rond a af op twee decimalen.

b Herleid de formule $y = 13 \cdot 2^{3x-1}$ tot de vorm $x = b \cdot {}^2\log(cy)$. Rond b en c af op twee decimalen.

c Werk de formule $y = 3 \cdot \log(x) - 5$ om tot de vorm $x = b \cdot 10^{cy}$. Rond b en c af op twee decimalen.

d Herleid de formule $K = 1 - \frac{1}{2} \cdot {}^3\log(2v)$ tot de vorm $v = b \cdot g^K$.

A42

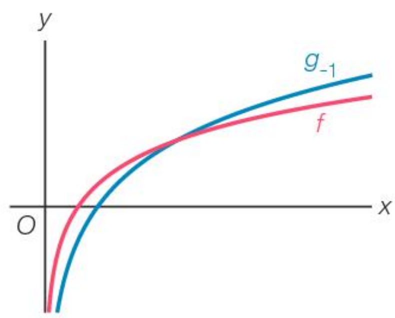
a Schrijf de formule ${}^2\log(4t - 1) = 5N + 3$ in de vorm $t = a + b \cdot 10^{cN}$. Rond c af op twee decimalen.

b Herleid de formule $M = 14 \cdot 1{,}3^{4N-3}$ tot de vorm $N = a + b \cdot \log(M)$. Rond a en b af op twee decimalen.

c Schrijf de formule $w = 125 \cdot \log(3T + 15) - 8$ in de vorm $T = a + b \cdot g^w$. Rond b en g af op drie decimalen.

d Werk de formule $p = 10 \cdot 5^{0{,}1q-3}$ om tot de vorm $q = b \cdot \log(cp)$. Rond b af op twee decimalen.

A43 Gegeven zijn de functies $f(x) = {}^2\log(x)$ en $g_a(x) = {}^2\log(x\sqrt{x}) + a$. In de figuur hiernaast zie je de grafieken van f en g_{-1}.



figuur 9.1

a De grafieken van f en g_a snijden elkaar in het punt S_a. Druk de coördinaten van S_a uit in a.

b De grafiek van g_a snijdt de x-as in het punt A_a. De verticale lijn door A_a snijdt de grafiek van f in het punt B_a. Bereken exact voor welke a de lengte van het lijnstuk A_aB_a gelijk is aan 4.

c Er is een waarde van a waarvoor de grafiek van g_a^{inv} de y-as snijdt in het punt $(0, 64)$. Stel bij deze waarde van a het functievoorschrift op van g_a^{inv}.

E44 Schrijf de formule ${}^2\log(N) = -1{,}9 + 0{,}3 \cdot {}^3\log(t)$ in de vorm $t = aN^b$. Rond a af op gehelen en b op twee decimalen.

Terugblik

Groeipercentages omzetten naar een andere tijdseenheid

Is g de groeifactor per tijdseenheid, dan is de groeifactor per n tijdseenheden gelijk aan g^n. Deze regel geldt ook voor niet-gehele waarden van n. Zo hoort bij een groeifactor van 1,8 per uur een groeifactor van $1{,}8^{\frac{1}{4}} \approx 1{,}158$ per kwartier.

Het omzetten van een groeipercentage naar een andere tijdseenheid gaat via groeifactoren. Is de afname per dag 20%, dan is

- de groeifactor per dag gelijk aan 0,8
- de groeifactor per week $0{,}8^7 \approx 0{,}210$, dus de afname per week is 79,0%
- de groeifactor per uur $0{,}8^{\frac{1}{24}} \approx 0{,}991$, dus de afname per uur is 0,9%.

Verdubbelingstijd en halveringstijd

De verdubbelingstijd T is de tijd die verloopt totdat een hoeveelheid verdubbeld is bij exponentiële groei. Bij groeifactor g bereken je deze verdubbelingstijd door de vergelijking $g^T = 2$ op te lossen.

Is $g = 1{,}073$, dan krijg je $1{,}073^T = 2$

$$T = {}^{1{,}073}\log(2) \approx 9{,}84$$

$\boxed{g^T = 2 \text{ geeft } T = {}^{g}\log(2)}$

Bij een gegeven verdubbelingstijd kun je het groeipercentage berekenen. Bij een verdubbelingstijd van 7 maanden krijg je $g_{7\text{ maanden}} = 2$, dus $g_{\text{maand}} = 2^{\frac{1}{7}} \approx 1{,}104$. De toename is 10,4% per maand.

De halveringstijd T bij groeifactor g is de tijd die verloopt totdat een hoeveelheid gehalveerd is en bereken je door de vergelijking $g^T = \frac{1}{2}$ op te lossen.

Exponentiële en logaritmische formules omwerken

Het vrijmaken van x bij de formules $y = 40 + 5 \cdot 2^{x-1}$ en $y = 2 - \frac{1}{2} \cdot {}^{3}\log(2x + 1)$ gaat als volgt.

$$40 + 5 \cdot 2^{x-1} = y$$
$$5 \cdot 2^{x-1} = y - 40$$
$$2^{x-1} = 0{,}2y - 8$$
$$x - 1 = {}^{2}\log(0{,}2y - 8)$$
$$x = 1 + {}^{2}\log(0{,}2y - 8)$$

$$\tfrac{1}{2} \cdot {}^{3}\log(2x + 1) = -y + 2$$
$${}^{3}\log(2x + 1) = -2y + 4$$
$$2x + 1 = 3^{-2y+4}$$
$$2x = -1 + 3^{-2y} \cdot 3^4$$
$$x = -\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} \cdot 3^4 \cdot (3^{-2})^y$$
$$x = -\tfrac{1}{2} + 40\tfrac{1}{2} \cdot (\tfrac{1}{9})^y$$

9.3 Het grondtal e

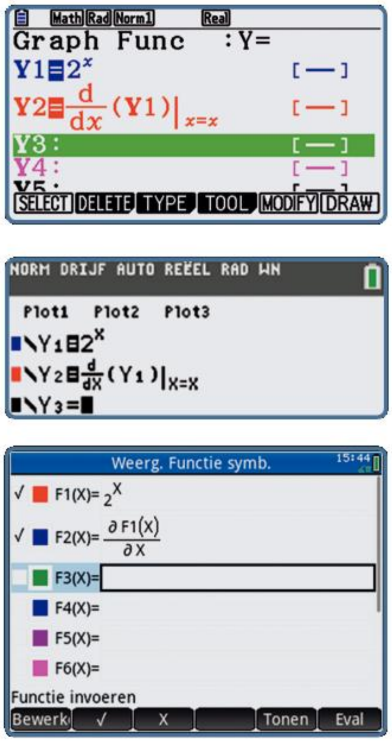
045 Gegeven zijn $y_1 = 2^x$ en y_2 is de afgeleide van y_1.

a Plot de grafieken van y_1 en y_2. Gebruik voor y_2 de numerieke afgeleide. Zie de GR-schermen hiernaast. Neem x tussen −3 en 3 en y tussen 0 en 5.

De grafiek van y_2 ontstaat uit de grafiek van y_1 door een vermenigvuldiging ten opzichte van de x-as, dus $y_2 = c \cdot y_1$.

b Ga na dat dit zo is door de grafiek van $y_3 = \dfrac{y_2}{y_1}$ te plotten en geef de waarde van c in vier decimalen.

c Verander $y_1 = 2^x$ in $y_1 = 3^x$. Ga na dat $\dfrac{y_2}{y_1}$ weer constant is en geef de waarde van deze constante in vier decimalen.



figuur 9.2

046 De definitie van de afgeleide van een functie f is

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

Bij de functie $f(x) = 2^x$ krijg je $f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{2^h - 1}{h} \cdot 2^x$.

a Toon dit aan.

b Licht toe dat $f'(0) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{2^h - 1}{h}$.

c Licht toe dat $f(x) = 2^x$ geeft $f'(x) = f'(0) \cdot 2^x$.

Theorie A De afgeleide van $f(x) = g^x$

In opgave 46 heb je gezien dat bij de functie $f(x) = 2^x$ de afgeleide te schrijven is als $f'(x) = f'(0) \cdot 2^x$.
We gaan aantonen dat in het algemeen geldt $f(x) = g^x$ geeft $f'(x) = f'(0) \cdot g^x$.
Dit gaat als volgt.

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{g^{x+h} - g^x}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{g^x \cdot g^h - g^x}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(g^h - 1) \cdot g^x}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{g^h - 1}{h} \cdot g^x \ \ldots \ \textbf{(1)}$$

$$f'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{g^h - 1}{h} \cdot g^0 = \lim_{h \to 0} \frac{g^h - 1}{h} \cdot 1 = \lim_{h \to 0} \frac{g^h - 1}{h} \ \ldots \ \textbf{(2)}$$

Uit **(1)** en **(2)** volgt $f(x) = g^x$ geeft $f'(x) = f'(0) \cdot g^x$.

In opgave 45 vond je dat $f(x) = 2^x$ geeft $f'(x) = 0{,}6931 \cdot 2^x$ en $f(x) = 3^x$ geeft $f'(x) = 1{,}0986 \cdot 3^x$.
Omdat $0{,}6931 < 1$ en $1{,}0986 > 1$ kun je je afvragen of er een grondtal g is waarbij $f(x) = g^x$ geeft $f'(x) = 1 \cdot g^x$, oftewel dat de afgeleide gelijk is aan de functie zelf.
Omdat $f'(0) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{g^h - 1}{h}$ zou dus moeten gelden $\dfrac{g^h - 1}{h} \approx 1$ voor $h \approx 0$, oftewel $g^h - 1 \approx h$ voor $h \approx 0$.
Uit $g^h - 1 \approx h$ volgt $g^h \approx h + 1$, dus $g \approx (h + 1)^{\frac{1}{h}}$ voor $h \approx 0$.

We moeten dus onderzoeken wat de uitkomst is van $\lim\limits_{h \to 0} (h + 1)^{\frac{1}{h}}$.

047 Gegeven is $y_1 = (x + 1)^{\frac{1}{x}}$.
a Plot de grafiek van y_1.
b Waarom lukt het niet om y_1 te berekenen voor $x = 0$?
c Bereken y_1 voor $x = 0{,}01$, voor $x = 0{,}001$, voor $x = 0{,}0001$ en voor $x = 0{,}00001$. Rond af op vier decimalen.
d Er is een getal g waarvoor geldt $f(x) = g^x$ geeft $f'(x) = g^x$. Geef dit getal in drie decimalen.

Theorie B Het getal e

In opgave 47 heb je gezien dat $\lim\limits_{h \to 0} (h + 1)^{\frac{1}{h}} \approx 2{,}718$, dus voor $g \approx 2{,}718$ geldt $f(x) = g^x$ geeft $f'(x) = g^x$.
Dit grondtal speelt een belangrijke rol in de wiskunde en in allerlei vakgebieden waar wiskunde wordt gebruikt. Daarom wordt dit getal met een eigen letter aangeduid, de letter **e**.

$f(x) = \mathrm{e}^x$ geeft $f'(x) = \mathrm{e}^x$

Met het getal e reken je net zo als met andere getallen, dus net als $5\sqrt{2} + \sqrt{2} = 6\sqrt{2}$ is $5\mathrm{e} + \mathrm{e} = 6\mathrm{e}$.
En zo gelden voor e ook de rekenregels voor machten.

Zo volgt $\mathrm{e}^{4x} \cdot \mathrm{e}^x = \mathrm{e}^{5x}$ uit $a^p \cdot a^q = a^{p+q}$

$(\mathrm{e}^{3x})^2 = \mathrm{e}^{6x}$ uit $(a^p)^q = a^{pq}$

$(5\,\mathrm{e}^x)^2 = 25\,\mathrm{e}^{2x}$ uit $(ab)^p = a^p b^p$

$\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x} = \dfrac{1}{\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x}} = \dfrac{1}{(\mathrm{e}^x)^{\frac{1}{2}}} = \dfrac{1}{\sqrt{\mathrm{e}^x}}$ uit $a^{-p} = \dfrac{1}{a^p}$, $a^{pq} = (a^p)^q$ en $a^{\frac{1}{q}} = \sqrt[q]{a}$.

Voorbeeld

Herleid.

a $2e^2 + e^2$ **b** $e^{2x} \cdot e^x$ **c** $(e^{2x} + 3)^2$

Uitwerking

a $2e^2 + e^2 = 3e^2$

b $e^{2x} \cdot e^x = e^{2x+x} = e^{3x}$

c $(e^{2x} + 3)^2 = (e^{2x})^2 + 2 \cdot e^{2x} \cdot 3 + 3^2 = e^{4x} + 6\,e^{2x} + 9$

Het oplossen van vergelijkingen met **e-machten** gaat op dezelfde manier als het oplossen van exponentiële vergelijkingen met een ander grondtal.
Je kijkt eerst of de vergelijking is te herleiden tot de vorm $e^A = e^B$.
Lukt dit, dan gebruik je vervolgens $e^A = e^B$ geeft $A = B$.
Lukt dit niet, dan kun je misschien een factor buiten haakjes brengen of een substitutie gebruiken.

Voorbeeld

Los algebraïsch op.

a $e^{2x} - e^x = 0$ **b** $3x\,e^x = 11\,e^x$ **c** $e^{2x} + 2\,e^x = 3$

Uitwerking

a
$e^{2x} - e^x = 0$
$e^{2x} = e^x$
$2x = x$
$x = 0$

b
$3x\,e^x = 11\,e^x$
$3x = 11$
$x = 3\frac{2}{3}$

c
$e^{2x} + 2\,e^x = 3$
$(e^x)^2 + 2\,e^x - 3 = 0$
Stel $e^x = u$.
$u^2 + 2u - 3 = 0$
$(u - 1)(u + 3) = 0$
$u = 1 \vee u = -3$
$e^x = 1 \vee e^x = -3$
$x = 0$

R48

Zie het tweede voorbeeld.

a In de uitwerking van voorbeeld b worden bij de eerste stap beide leden van de vergelijking gedeeld door e^x.
Licht toe waarom dit mag.

b In de uitwerking van voorbeeld c krijg je bij de laatste stap dat $e^x = 1 \vee e^x = -3$ geeft $x = 0$.
Licht dit toe.

49 Herleid.

a $2e^2 - e^2$
b $4\sqrt{e} - \sqrt{e}$
c $5e^2 \cdot 3e^3$
d $\dfrac{12e^6}{4e^2}$
e $e^{5x} \cdot e^x$
f $e^x \cdot e^2$
g $5e^x - 3\,e^x$
h $e^x(e^2 + 1)$
i $e^x(e^x + 1)$
j $(e^x + 1)^2$
k $(e^{3x} + 3)^2$
l $\dfrac{6e^{2x} - e^x}{e^x}$

A50 Herleid.

a $(2 + 3\,e^{\frac{1}{2}x})^2$
b $(e^x + e^{-x})^2$
c $\dfrac{e^{2x} - 4}{e^x + 2}$

51 Los algebraïsch op.

a $(2x + 4)\,e^x = 0$
b $x^2 e^x = 3x\,e^x$
c $x^2 e^x = e^x$
d $e^{3x} - e^x = 0$
e $e^{4x} - 1 = 0$
f $e^x \cdot e^x = e^6$

A52 Los algebraïsch op.

a $e^x + e^x = 2e^6$
b $\dfrac{e^{5x}}{e^x} = e$
c $2x\,e^x + e^x = 0$
d $e^{x+2} - \sqrt{e} = 0$
e $e^{2x} + e^x = 2$
f $e^{6x} + 1 = 2\,e^{3x}$

E53 Los de vergelijking $e^{2x} + e^3 = (e + 1)\,e^{x+1}$ algebraïsch op.

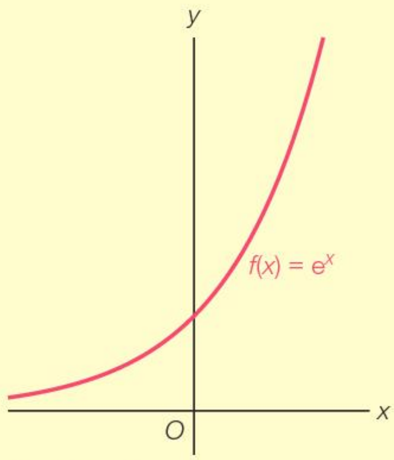
O54 Gegeven zijn de functies $f(x) = 2^x$ en $g(x) = 3^x$.

a Schets de grafieken van f en g in één figuur.
b Licht toe dat de grafiek van de functie $h(x) = e^x$ voor $x \neq 0$ tussen de grafieken van f en g ligt.

Theorie C Functies met e-machten differentiëren

De functie $f(x) = e^x$ is een exponentiële standaardfunctie. Het grondtal is e. De grafiek van f is stijgend en de x-as is horizontale asymptoot van de grafiek. Het domein van f is $D_f = \mathbb{R}$ en het bereik van f is $B_f = \langle 0, \rightarrow \rangle$.

Bij het berekenen van de afgeleide van een functie met een e-macht gebruik je $f(x) = e^x$ geeft $f'(x) = e^x$. Verder gebruik je de regels voor het differentiëren. Zie de volgende bladzijde.



figuur 9.3

$f(x) = c \cdot g(x)$ geeft $f'(x) = c \cdot g'(x)$

$s(x) = f(x) + g(x)$ geeft $s'(x) = f'(x) + g'(x)$ somregel

$v(x) = f(x) - g(x)$ geeft $v'(x) = f'(x) - g'(x)$ verschilregel

$p(x) = f(x) \cdot g(x)$ geeft $p'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$ productregel

$q(x) = \dfrac{t(x)}{n(x)}$ geeft $q'(x) = \dfrac{n(x) \cdot t'(x) - t(x) \cdot n'(x)}{(n(x))^2}$ quotiëntregel

$f(x) = u(v(x))$ geeft $f'(x) = u'(v(x)) \cdot v'(x)$ kettingregel

Voorbeeld

Bereken de afgeleide.

a $f(x) = 3\,\mathrm{e}^x + \dfrac{1}{x^2}$

b $f(x) = (x^2 + 2)\,\mathrm{e}^x$

c $f(x) = x\,\mathrm{e}^{2x+3}$

d $f(x) = \dfrac{x^3}{\mathrm{e}^{x^2}}$

Uitwerking

a $f(x) = 3\,\mathrm{e}^x + \dfrac{1}{x^2} = 3\,\mathrm{e}^x + x^{-2}$ geeft $f'(x) = 3\,\mathrm{e}^x - 2x^{-3} = 3\,\mathrm{e}^x - \dfrac{2}{x^3}$

b $f(x) = (x^2 + 2)\,\mathrm{e}^x$ geeft $f'(x) = 2x \cdot \mathrm{e}^x + (x^2 + 2) \cdot \mathrm{e}^x = (x^2 + 2x + 2)\,\mathrm{e}^x$

c $f(x) = x\,\mathrm{e}^{2x+3}$ geeft $f'(x) = 1 \cdot \mathrm{e}^{2x+3} + x \cdot \mathrm{e}^{2x+3} \cdot 2 = (2x + 1)\,\mathrm{e}^{2x+3}$

d $f(x) = \dfrac{x^3}{\mathrm{e}^{x^2}}$ geeft $f'(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{x^2} \cdot 3x^2 - x^3 \cdot \mathrm{e}^{x^2} \cdot 2x}{(\mathrm{e}^{x^2})^2} = \dfrac{3x^2 - 2x^4}{\mathrm{e}^{x^2}}$

Deel teller en noemer door e^{x^2}.

Voor het invoeren van formules met e-machten zit op de GR een toets.
Deze gebruik je ook om e-machten te benaderen.

R55 Zie het voorbeeld.
In welke onderdelen is de productregel gebruikt? En de quotiëntregel?
En de kettingregel?

56 Differentieer.

a $f(x) = \mathrm{e}^x + 2$

b $f(x) = 2\,\mathrm{e}^x + \dfrac{1}{x}$

c $f(x) = x\,\mathrm{e}^x + 4$

d $f(x) = \dfrac{x}{\mathrm{e}^x}$

e $f(x) = \dfrac{2\,\mathrm{e}^x}{x - 1}$

f $f(x) = (2x - 4)\,\mathrm{e}^x$

57 Bereken de afgeleide.

a $f(x) = e^{x^2+x}$

b $f(x) = x^2 + 2\,e^{3x}$

c $f(x) = x\,e^{x^2}$

d $f(x) = \dfrac{2\,e^{-x-1}}{x^2}$

e $f(x) = 3x\,e^{2x-1}$

f $f(x) = \dfrac{e^{2x}}{e^{2x}+1}$

58 Bereken. Rond af op drie decimalen.

a $-\dfrac{1}{e^2}$

b $\dfrac{3e}{(e+2)^2}$

c $1\frac{1}{3}\,e^3$

d $\dfrac{e^2}{2e-3}$

59 Gegeven is de functie $f(x) = x\,e^x + 2$.
De afgeleide van f is $f'(x) = (1+x)\,e^x$.

a Toon dit aan.

b Het minimum van f is $2 - \dfrac{1}{e}$ voor $x = -1$.

Toon dit aan.

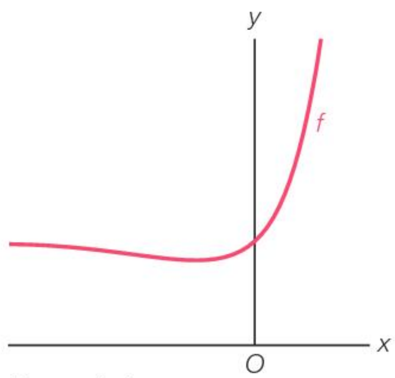
De tweede afgeleide van f is $f''(x) = (2+x)\,e^x$.

c Toon dit aan.

De grafiek van f heeft één buigpunt. De coördinaten van dit buigpunt zijn $\left(-2,\ 2 - \dfrac{2}{e^2}\right)$.

d Toon dit aan.

e Stel langs algebraïsche weg de formule op van de buigraaklijn k van de grafiek van f.

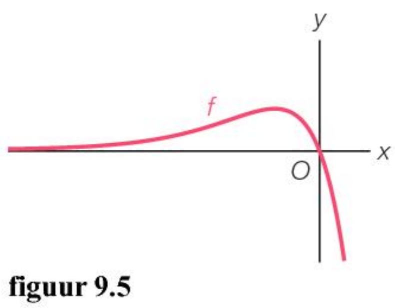


figuur 9.4

60 Gegeven is de functie $f(x) = -x\,e^x$.

a Bereken exact de extreme waarde van f.

b Stel langs algebraïsche weg de formule op van de buigraaklijn k van de grafiek van f.



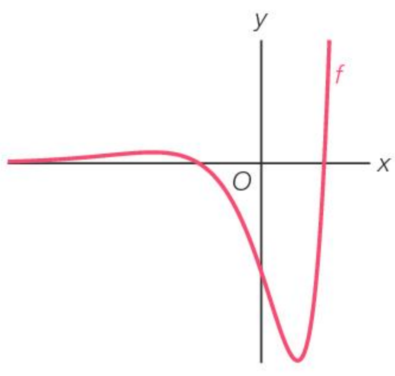
figuur 9.5

61 Gegeven is de functie $f(x) = (x^2 - 3)\,e^x$.

a Bereken exact de nulpunten van f.

b Bereken exact de extreme waarden van f.

c Bereken exact de x-coördinaten van de buigpunten van de grafiek van f.



figuur 9.6

A62 Gegeven zijn de functies $f(x) = \frac{1}{2}e^{2x}$ en $g(x) = \dfrac{1}{e^{x+3}}$.

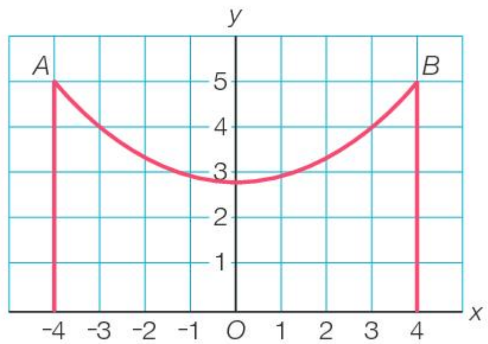
a De lijn k raakt de grafiek van f in het punt A met $x_A = -1$.
De lijn l raakt de grafiek van g in het punt B met $x_B = -1$.
Bereken algebraïsch de x-coördinaat van het snijpunt van k en l.

b De functie h is de somfunctie van f en g, dus $h(x) = f(x) + g(x)$.
Bewijs dat $B_h = \left[\dfrac{3}{2e^2}, \rightarrow\right\rangle$.

A63 Als we een vrij hangend, volkomen buigzaam, overal even dik en even zwaar touw tussen twee punten A en B ophangen, dan hangt het touw in een gebogen lijn. Deze lijn wordt een kettinglijn genoemd.

We bekijken een kettinglijn waarbij de punten A en B zich beide 5 meter boven de grond bevinden op een afstand van 8 meter van elkaar. We brengen in het verticale vlak waarin het touw hangt een assenstelsel aan, zodat het laagste punt van het touw op de y-as ligt en de x-as horizontaal langs de grond loopt. In het assenstelsel in figuur 9.7 is $A(-4, 5)$ en $B(4, 5)$.
De kettinglijn in figuur 9.7 is dan de grafiek van de functie $h(x) = 2(e^{\frac{1}{4}x} + e^{-\frac{1}{4}x}) + c$ met x en $h(x)$ in meters.

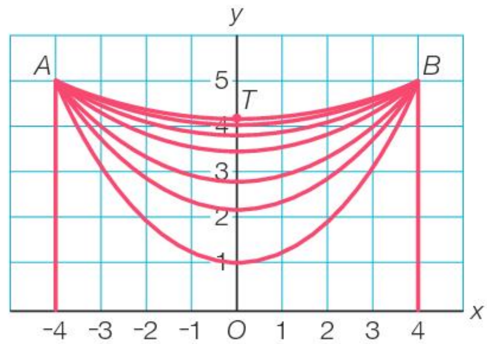
a Bereken exact de waarde van c.



figuur 9.7

In figuur 9.8 zijn touwen van verschillende lengte opgehangen tussen A en B. Bij de kettinglijn die door het punt T gaat hoort de functie
$h(x) = 5(e^{0,1x} + e^{-0,1x}) - 5,81$ met x en $h(x)$ in meters.

b Bereken van deze kettinglijn met behulp van differentiëren de helling in B. Rond af op twee decimalen.



figuur 9.8

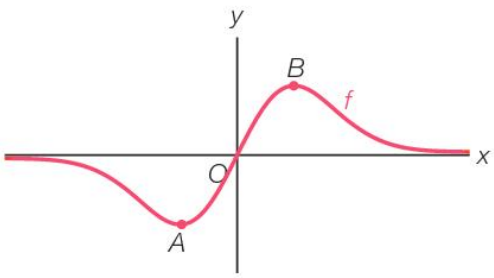
Het functievoorschrift voor een willekeurige kettinglijn door de punten A en B wordt gegeven door $h_k(x) = \dfrac{1}{2k}(e^{kx} + e^{-kx} - e^{4k} - e^{-4k}) + 5$ waarbij $-4 \leq x \leq 4$.
Hierin is k een constante die afhangt van de lengte van het touw.
Er wordt een touw opgehangen tussen A en B waarbij het laagste punt van dit touw samenvalt met $(0, 0)$.

c Bereken de waarde van k van dit touw. Rond af op twee decimalen.

A64 ⊙✱ Gegeven is de functie $f(x) = 2x\,\mathrm{e}^{-x^2}$. In de figuur hiernaast zie je dat de grafiek van f de toppen A en B heeft. Het verschil $y_B - y_A$ is te herleiden tot de vorm $2\sqrt{a}$.

a Bereken exact de waarde van a.

b Bereken exact de coördinaten van de buigpunten van de grafiek van f.



figuur 9.9

A65 ✱ Voor elke waarde van a is de functie f_a gegeven door $f_a(x) = x\,\mathrm{e}^{ax^3}$.
De functie f_a heeft voor $x = 2$ een extreme waarde.
Bereken exact de waarde van a die hierbij hoort en onderzoek of de extreme waarde een minimum of een maximum is.

GESCHIEDENIS

Euler

Leonhard Euler (1707-1783) is een van de meest vooraanstaande wiskundigen uit de geschiedenis. De eerste lessen in wiskunde kreeg hij van zijn vader, een dominee uit Basel. Na zijn opleiding op het gymnasium van Basel studeerde hij theologie en wiskunde. Op twintigjarige leeftijd werd hij benoemd tot hoogleraar natuurkunde aan de door tsaar Peter de Grote gestichte academie van Sint-Petersburg. In 1731 werd hij daar hoogleraar wiskunde.
Euler was bijzonder productief: hij publiceerde in totaal 886 boeken en geschriften.
De functienotatie $f(x)$ werd door hem ingevoerd, evenals de symbolen voor de getallen π en e.
Euler bewees dat e een irrationaal getal is. Een irrationaal getal is een getal dat niet als breuk te schrijven is.
De decimale ontwikkeling van zo'n getal gaat oneindig door en vertoont geen enkele regelmaat.
In zijn boek Introductio in Analysin Infinitorum geeft Euler e in 23 decimalen.
Hij gebruikte $\mathrm{e} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \ldots$ en vond
$\mathrm{e} \approx 2{,}71828182845904523536028$.

Terugblik

De afgeleide van $f(x) = g^x$ en het getal e

$f(x) = g^x$ geeft $f'(x) = f'(0) \cdot g^x$

Voor het getal e geldt $f(x) = e^x$ geeft $f'(x) = e^x$ en $e \approx 2{,}718$.

Het rekenen met e gaat net zoals met andere getallen.

Bij het herleiden van e-machten gebruik je de rekenregels voor machten.

$3e^2 + e^2 = 4e^2$

$e^{3x} \cdot e^x = e^{3x+x} = e^{4x}$

$(e^{3x} - 4)^2 = (e^{3x})^2 - 8\,e^{3x} + 16 = e^{6x} - 8\,e^{3x} + 16$

Vergelijkingen zoals $e^{3x} - e^{x-1} = 0$

$e^{3x} - e^{x-1} = 0$

$e^{3x} = e^{x-1}$ Uit $e^A = e^B$ volgt $A = B$.

$3x = x - 1$

$2x = -1$

$x = -\frac{1}{2}$

Vergelijkingen zoals $(x^2 + 2x)\,e^x = 0$

$(x^2 + 2x)\,e^x = 0$

$x^2 + 2x = 0$

$x(x + 2) = 0$

$x = 0 \vee x = -2$

Vergelijkingen zoals $e^{6x} + 5\,e^{3x} = 6$

$e^{6x} + 5\,e^{3x} = 6$

$(e^{3x})^2 + 5\,e^{3x} - 6 = 0$

Stel $e^{3x} = u$.

$u^2 + 5u - 6 = 0$

$(u - 1)(u + 6) = 0$

$u = 1 \vee u = -6$

$e^{3x} = 1 \vee e^{3x} = -6$

$3x = 0$

$x = 0$

De afgeleide van functies met e-machten

Bij het differentiëren van $f(x) = x^2\,e^x$ gebruik je de productregel.

Je krijgt $f'(x) = 2x \cdot e^x + x^2 \cdot e^x = (x^2 + 2x)\,e^x$.

Voor het berekenen van de afgeleide van $g(x) = \dfrac{x^3}{e^x}$ gebruik je de quotiëntregel. Je krijgt $g'(x) = \dfrac{e^x \cdot 3x^2 - x^3 \cdot e^x}{(e^x)^2} = \dfrac{3x^2 - x^3}{e^x}$. Bij de laatste stap deel je de teller en de noemer door e^x.

Om de afgeleide van $k(x) = 2\,e^{x^2+1}$ te berekenen, gebruik je de kettingregel. Je krijgt $k'(x) = 2\,e^{x^2+1} \cdot 2x = 4x\,e^{x^2+1}$.

9.4 De natuurlijke logaritme

O66 Gegeven zijn de functies $f(x) = 2^x$ en $g(x) = \mathrm{e}^x$.

a Geef het functievoorschrift van f^{inv}.

b Geef het functievoorschrift van g^{inv}.

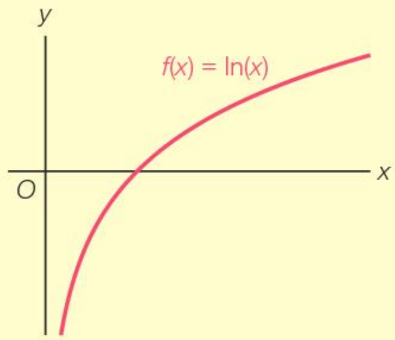
f^{inv} is de inverse van f.

Theorie A Logaritmen met grondtal e

De inverse van de functie $f(x) = \mathrm{e}^x$ is $f^{\text{inv}}(x) = {}^{\mathrm{e}}\log(x)$.
De logaritme met grondtal e heet de **natuurlijke logaritme** en wordt aangegeven met **ln**.
Dus $f(x) = \mathrm{e}^x$ geeft $f^{\text{inv}}(x) = \ln(x)$.

ln is de afkorting van logaritmus naturalis.

De functie $f(x) = \ln(x)$ is een logaritmische standaardfunctie. Het grondtal van de logaritme is e. De grafiek van f is stijgend en de y-as is verticale asymptoot van de grafiek. Het domein van f is $D_f = \langle 0, \rightarrow \rangle$ en het bereik van f is $B_f = \mathbb{R}$.



figuur 9.10

De natuurlijke logaritme van a is de logaritme van a met grondtal e, dus $\ln(a) = {}^{\mathrm{e}}\log(a)$.

Voor de natuurlijke logaritme gelden de rekenregels voor logaritmen.
Zo volgt

$\ln(20) + \ln(10) = \ln(200)$ uit ${}^{g}\log(a) + {}^{g}\log(b) = {}^{g}\log(ab)$

$\ln(20) - \ln(10) = \ln(2)$ uit ${}^{g}\log(a) - {}^{g}\log(b) = {}^{g}\log\left(\frac{a}{b}\right)$

$\frac{1}{2}\ln(9) = \ln(3)$ uit $p \cdot {}^{g}\log(a) = {}^{g}\log(a^p)$

$\ln(\mathrm{e}^4) = 4$ uit ${}^{g}\log(g^a) = a$.

Het oplossen van vergelijkingen met natuurlijke logaritmen gaat op dezelfde manier als het oplossen van logaritmische vergelijkingen met een ander grondtal.

- Bij de vergelijking $\ln(2x) = \ln(3x - 1)$ gebruik je $\ln(A) = \ln(B)$ geeft $A = B$.
- Bij de vergelijking $2x\ln(3x + 1) = 0$ gebruik je $AB = 0$ geeft $A = 0 \vee B = 0$.
- Bij de vergelijking $\ln^2(2x) + \ln(2x) - 6 = 0$ gebruik je de substitutie $\ln(2x) = u$.

Controleer bij het oplossen van de vergelijkingen of de logaritmen voor de gevonden waarden gedefinieerd zijn.

$\ln^2(A)$ betekent $(\ln(A))^2$.

Voorbeeld

a Bereken algebraïsch $\ln(e^2 \cdot \sqrt{e})$.
b Los algebraïsch op $3\,e^{2x+1} = 15$. Rond af op drie decimalen.
c Herleid $3 + \ln(2)$ tot één logaritme.
d Bereken exact de oplossing van $4\ln(x) = 6$.

Uitwerking

a $\ln(e^2 \cdot \sqrt{e}) = \ln(e^2 \cdot e^{\frac{1}{2}}) = \ln(e^{2\frac{1}{2}}) = 2\frac{1}{2}$

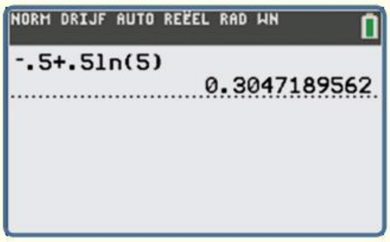
b $3\,e^{2x+1} = 15$

$e^{2x+1} = 5$ $\quad$ $e^A = B$ geeft $A = \ln(B)$

$2x + 1 = \ln(5)$

$2x = -1 + \ln(5)$

$x = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\ln(5) \approx 0{,}305$



c $3 + \ln(2) = \ln(e^3) + \ln(2) = \ln(2e^3)$

d $4\ln(x) = 6$

$\ln(x) = 1\frac{1}{2}$

$x = e^{1\frac{1}{2}} = e\sqrt{e}$

67 Bereken algebraïsch.

a $\ln(e)$
b $\ln(e\sqrt{e})$
c $\ln\left(\frac{1}{e}\right)$
d $\ln(1)$
e $3\ln(e \cdot \sqrt[3]{e})$
f $\ln^2(e^3)$
g $\ln^3(e^2)$
h $e^{\ln(7)} + e^{2\ln(7)}$
i $e^{\frac{1}{2}\ln(5)}$
j $e^{\ln(10)} \cdot e^{\ln(3)}$

68 Los algebraïsch op. Rond af op drie decimalen.

a $e^{3x} = 12$
b $5\,e^{2x} = 60$
c $6 + e^{0,5x+2} = 10$
d $\dfrac{3}{5\,e^{2x-1}} = 10$

69 Herleid tot één logaritme.

a $2\ln(3) + \ln(4)$
b $\ln(20) - 3\ln(2)$
c $4 + \ln(3)$
d $1 + \ln(10)$
e $\frac{1}{2} + 2\ln(6)$
f $e + \ln(2)$

$a = \ln(e^a)$

70 Bereken exact de oplossingen.

a $\ln(x) = -1$
b $4\ln(x) = 2$
c $\ln(3x) = 3$
d $\ln(-x + 2) = -2$
e $\ln^2(x) = \frac{1}{4}$
f $\ln(x) = 1 + \ln(5)$

A71 Los exact op.

a $3x\ln(x) = 2\ln(x)$

b $\ln^2(x) - \ln(x) = 0$

c $x^2\ln(x+1) = 4\ln(x+1)$

d $4\,e^{1-3x} = 20$

e $\ln^2(x) - 2\ln(x) - 3 = 0$

f $\ln(x+3) - \ln(x-1) = \ln(2)$

g $2\ln(x) = \ln(2) + \ln(x+4)$

h $e^{x^2} = 100$

A72 Bij een groep patiënten geeft de formule $F = 16(0{,}6 + \ln(G))$ het verband tussen het lichaamsgewicht G in kg en de hartslagfrequentie F in slagen per minuut.

a Bereken de hartslagfrequentie van een patiënt van 100 kg.

b Bereken algebraïsch welk gewicht correspondeert met een hartslagfrequentie van 78 slagen per minuut.

c Schrijf de formule in de vorm $G = b \cdot g^F$. Rond b en g af op drie decimalen.

O73 Met de regel $g^{{}^g\log(x)} = x$ kun je 2 als macht van e schrijven.
Je krijgt $2 = e^{\ln(2)}$.

a Licht toe dat $2^x = e^{\ln(2)\cdot x}$.

b Toon met behulp van $2^x = e^{\ln(2)\cdot x}$ aan dat $f(x) = 2^x$ geeft $f'(x) = 2^x \cdot \ln(2)$.

O74 In deze opgave ga je bewijzen dat $f(x) = \ln(x)$ geeft $f'(x) = \dfrac{1}{x}$ en

$h(x) = {}^2\log(x)$ geeft $h'(x) = \dfrac{1}{x\ln(2)}$.

a Gebruik $e^{\ln(x)} = x$ om aan te tonen dat $e^{\ln(x)} \cdot f'(x) = 1$.

b Hoe volgt uit vraag a dat $f'(x) = \dfrac{1}{x}$?

c Gebruik ${}^2\log(x) = \dfrac{\ln(x)}{\ln(2)}$ en toon met behulp van vraag b aan dat

$h(x) = {}^2\log(x)$ geeft $h'(x) = \dfrac{1}{x\ln(2)}$.

Theorie B Exponentiële en logaritmische functies differentiëren

In opgave 73 heb je gezien dat $f(x) = 2^x$ geeft $f'(x) = 2^x \cdot \ln(2)$.
Algemeen geldt $f(x) = g^x = e^{\ln(g) \cdot x}$ geeft $f'(x) = e^{\ln(g) \cdot x} \cdot \ln(g) = g^x \cdot \ln(g)$.

In opgave 74 heb je gezien dat $f(x) = \ln(x)$ geeft $f'(x) = \frac{1}{x}$ en
$h(x) = {}^2\log(x)$ geeft $h'(x) = \frac{1}{x\ln(2)}$.

Algemeen geldt
$f(x) = {}^g\log(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(g)} = \frac{1}{\ln(g)} \cdot \ln(x)$ geeft $f'(x) = \frac{1}{\ln(g)} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{x\ln(g)}$.

$f(x) = g^x$ geeft $f'(x) = g^x \cdot \ln(g)$
$f(x) = \ln(x)$ geeft $f'(x) = \frac{1}{x}$
$f(x) = {}^g\log(x)$ geeft $f'(x) = \frac{1}{x\ln(g)}$

Voorbeeld

Differentieer.

a $f(x) = 3^{2x-1}$

b $f(x) = \frac{\ln(x) + 1}{x}$

c $f(x) = {}^3\log(x^2 + 1)$

Uitwerking

a $f(x) = 3^{2x-1}$ geeft $f'(x) = 3^{2x-1} \cdot \ln(3) \cdot 2 = 2 \cdot 3^{2x-1} \cdot \ln(3)$

b $f(x) = \frac{\ln(x) + 1}{x}$ geeft $f'(x) = \frac{x \cdot \frac{1}{x} - (\ln(x) + 1) \cdot 1}{x^2} = \frac{1 - \ln(x) - 1}{x^2} = \frac{-\ln(x)}{x^2}$

c $f(x) = {}^3\log(x^2 + 1)$ geeft $f'(x) = \frac{1}{(x^2 + 1) \cdot \ln(3)} \cdot 2x = \frac{2x}{(x^2 + 1)\ln(3)}$

75

a Toon aan dat $f(x) = \ln(ax)$ geeft $f'(x) = \frac{1}{x}$.

b Schrijf in één keer de afgeleide op van $f(x) = \ln(2x)$ en $g(x) = \ln(x\sqrt{2})$.

c Toon aan dat $f(x) = \ln(x^n)$ geeft $f'(x) = \frac{n}{x}$.

d Schrijf in één keer de afgeleide op van $f(x) = \ln(x^2)$, $g(x) = \ln\left(\frac{1}{x}\right)$ en $h(x) = \ln(\sqrt{x})$.

76 Differentieer.

a $f(x) = 3^{4x-2}$

b $f(x) = \dfrac{1 - \ln(x)}{x}$

c $f(x) = {}^2\log(4x - 1)$

d $f(x) = \dfrac{\ln(3x)}{x}$

e $f(x) = x\ln(x^3)$

f $f(x) = \ln(x^2 + x)$

77 Bereken de afgeleide.

a $f(x) = \ln(2^x)$

b $f(x) = {}^2\log(x^2 + 1)$

c $f(x) = x\ln^2(x)$

d $f(x) = x^2 \cdot {}^3\log(4x)$

e $f(x) = (2^x - 1) \cdot 2^x$

f $f(x) = \ln^2(4x)$

78 De regel $f(x) = x^n$ geeft $f'(x) = nx^{n-1}$ heb je al bewezen voor gehele waarden van n. In deze opgave ga je deze regel bewijzen voor niet-gehele waarden van n. Daarom nemen we $x > 0$.

a Licht toe dat $x^n = e^{n\ln(x)}$.

b Toon met behulp van de kettingregel aan dat

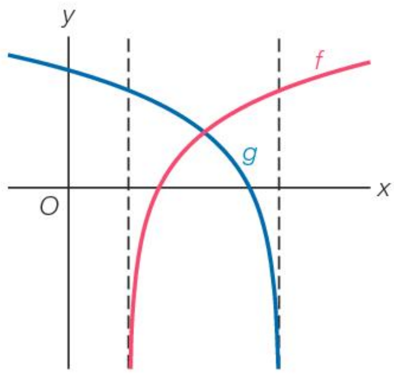
$f(x) = e^{n\ln(x)}$ geeft $f'(x) = e^{n\ln(x)} \cdot \dfrac{n}{x}$.

c Hoe volgt hieruit dat $f(x) = x^n$ geeft $f'(x) = nx^{n-1}$? Waarom is de regel nu ook bewezen voor elke niet-gehele n van $\mathbb{R}$?

79 Gegeven zijn de functies $f(x) = \ln(x - 2)$ en $g(x) = \ln(7 - x)$.

a Los exact op $f(x) \leq g(x)$.

b Bereken exact de extreme waarde van de somfunctie $s(x) = f(x) + g(x)$.

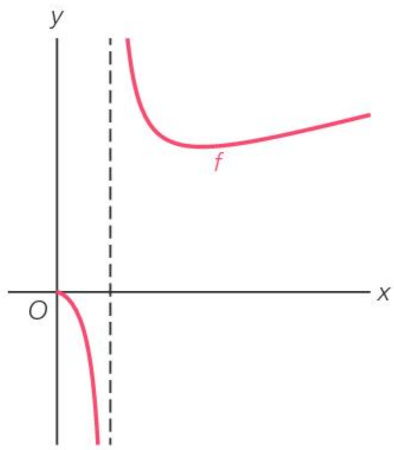


figuur 9.11

80 Gegeven is de functie $f(x) = \dfrac{x}{\ln(x)}$.

a Stel langs algebraïsche weg de formule op van de lijn k die de grafiek van f raakt in het punt A met $x_A = \dfrac{1}{e}$.

b De grafiek van f heeft twee raaklijnen met richtingscoëfficiënt −6.
Bereken exact de coördinaten van de raakpunten.

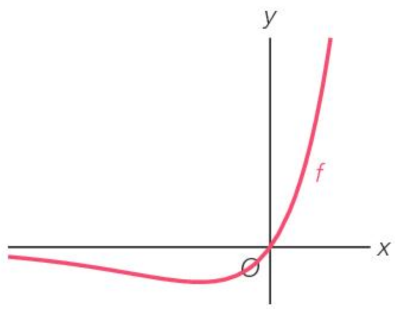


figuur 9.12

A81 Gegeven is de functie $f(x) = 2^{2x} - 2^x$.

a Bereken algebraïsch het bereik van f.

b Bereken exact de coördinaten van het buigpunt van de grafiek van f.

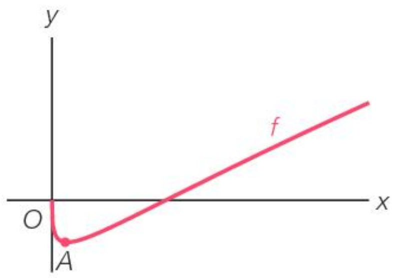


figuur 9.13

A82 Gegeven is de functie $f(x) = \sqrt{x}\ \ln(\sqrt{x})$. Hiernaast zie je de grafiek van f.

a Bereken exact de coördinaten van de top A van de grafiek van f.

b Stel algebraïsch de formule op van de buigraaklijn k van de grafiek van f.



figuur 9.14

A83 Een zojuist ingeschonken kop koffie heeft een temperatuur van 80 °C. De koffie koelt af volgens de formule $T = 20 + p\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{6}t}$.
Hierin is t de tijd in minuten en T de temperatuur van de koffie in °C.
Uit de gegevens volgt $p = 60$.

a Toon dit aan.

b Bereken algebraïsch na hoeveel minuten en hoeveel seconden de temperatuur van de koffie 45 °C is.

c Bereken algebraïsch de snelheid waarmee de temperatuur van de koffie afneemt twee minuten nadat de koffie is ingeschonken.

d De formule is te herleiden tot de vorm $t = a\ln(bT + c)$.
Bereken exact de waarden van a, b en c.

A84 Voor elke $a > 0$ is de functie f_a gegeven door $f_a(x) = \ln\left(\frac{ax}{2x+1}\right)$ met domein $\langle 0, \rightarrow\rangle$.

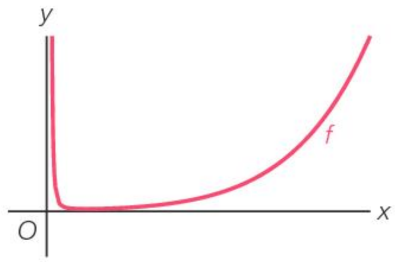
a De lijn k met $\mathrm{rc}_k = \frac{1}{3}$ raakt de grafiek van f_2 in het punt A.
Bereken exact de coördinaten van A.

b Bereken exact voor welke a de functie $g(x) = \frac{\mathrm{e}^x}{3 - 2\,\mathrm{e}^x}$ de inverse is van f_a.

A85 ⊙✱ Gegeven is de functie $f(x) = \mathrm{e}^{\ln^2(x) + 2\ln(x) - 3}$.
Zie de figuur hiernaast.

a Los exact op $f(x) \leq 1$.

b Bereken exact het bereik van f.



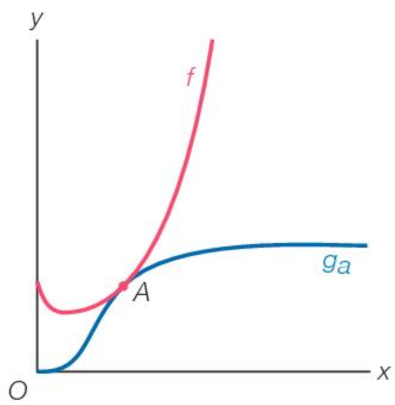
figuur 9.15

E86 ✱ Gegeven is de functie $f(x) = x^x$ met domein $\langle 0, \rightarrow \rangle$.
De afgeleide van f is $f'(x) = (\ln(x) + 1) \cdot x^x$.

a Bewijs dit.

Voor elke waarde van a is de functie g_a gegeven door $g_a(x) = x^{\frac{a}{x}}$ met domein $\langle 0, \rightarrow \rangle$.
Er is een waarde van a waarvoor de grafiek van g_a de grafiek van f raakt. Het raakpunt noemen we A.

b Bereken exact deze waarde van a en stel de formule op van de lijn k die de grafieken raakt in A.



figuur 9.16

Terugblik

Natuurlijke logaritmen

Logaritmen met grondtal e heten natuurlijke logaritmen. De notatie voor ${}^{\mathrm{e}}\log(x)$ is $\ln(x)$. Dus $\ln(\mathrm{e} \cdot \sqrt[3]{\mathrm{e}}) = \ln(\mathrm{e} \cdot \mathrm{e}^{\frac{1}{3}}) = \ln(\mathrm{e}^{1\frac{1}{3}}) = 1\frac{1}{3}$ en $\mathrm{e}^{\ln(5)} = 5$.
Bij het herleiden van natuurlijke logaritmen gebruik je de rekenregels voor logaritmen.

Zo is $5 - \ln(3) = \ln(\mathrm{e}^5) - \ln(3) = \ln\left(\frac{\mathrm{e}^5}{3}\right) = \ln(\frac{1}{3}\mathrm{e}^5)$ en

$3\ln(2) + \ln(6) = \ln(2^3) + \ln(6) = \ln(8) + \ln(6) = \ln(8 \cdot 6) = \ln(48)$.

Vergelijkingen zoals $\mathrm{e}^{2x+3} = 7$

$\mathrm{e}^{2x+3} = 7$ $\quad$ $\mathrm{e}^A = B$ geeft $A = \ln(B)$
$2x + 3 = \ln(7)$
$2x = -3 + \ln(7)$
$x = -1\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\ln(7)$

Vergelijkingen zoals $x^2\ln(x) = 4\ln(x)$

$x^2\ln(x) = 4\ln(x)$
$\ln(x) = 0 \vee x^2 = 4$
$x = 1 \vee x = 2 \vee x = -2$
vold. niet

Vergelijkingen zoals $2\ln(x) + \ln(9) = 2$

$2\ln(x) + \ln(9) = 2$
$2\ln(x) = 2 - \ln(9)$
$\ln(x) = 1 - \frac{1}{2}\ln(9)$
$\ln(x) = \ln(\mathrm{e}) - \ln(\sqrt{9})$
$\ln(x) = \ln\left(\frac{\mathrm{e}}{3}\right)$
$x = \frac{1}{3}\mathrm{e}$

Vergelijkingen zoals $\ln^2(x) + \ln(x) - 6 = 0$

$\ln^2(x) + \ln(x) - 6 = 0$
Stel $\ln(x) = u$.
$u^2 + u - 6 = 0$
$(u - 2)(u + 3) = 0$
$u = 2 \vee u = -3$
$\ln(x) = 2 \vee \ln(x) = -3$
$x = \mathrm{e}^2 \vee x = \mathrm{e}^{-3}$

Exponentiële en logaritmische functies differentiëren

$f(x) = \mathrm{e}^x$ geeft $f'(x) = \mathrm{e}^x$ $\qquad$ $f(x) = g^x$ geeft $f'(x) = g^x \cdot \ln(g)$

$f(x) = \ln(x)$ geeft $f'(x) = \dfrac{1}{x}$ $\qquad$ $f(x) = {}^{g}\log(x)$ geeft $f'(x) = \dfrac{1}{x\ln(g)}$

Bij het differentiëren heb je vaak de productregel, de quotiëntregel of de kettingregel nodig. Ook combinaties van deze regels komen voor.

- $f(x) = \dfrac{2^x}{2^x + 1}$ geeft $f'(x) = \dfrac{(2^x + 1) \cdot 2^x \cdot \ln(2) - 2^x \cdot 2^x \cdot \ln(2)}{(2^x + 1)^2} = \dfrac{2^x \cdot \ln(2)}{(2^x + 1)^2}$
- $g(x) = x^2 \cdot \ln(2x)$ geeft $g'(x) = 2x \cdot \ln(2x) + x^2 \cdot \dfrac{1}{x} = 2x\ln(2x) + x$
- $h(x) = {}^{2}\log(x^2 + 4)$ geeft $h'(x) = \dfrac{1}{(x^2 + 4) \cdot \ln(2)} \cdot 2x = \dfrac{2x}{(x^2 + 4)\ln(2)}$

Eindopdracht Radioactief verval

Levend organisch materiaal bevat de koolstofisotopen $^{14}_{6}C$ en $^{12}_{6}C$ in een vaste verhouding. Als het materiaal sterft, vervalt het radioactieve $^{14}_{6}C$ exponentieel met een halveringstijd van 5730 jaar.
In het hoofdstuk is afgesproken om groeifactoren op drie decimalen af te ronden, tenzij anders wordt gevraagd. In dit geval is het niet verstandig om de groeifactor op drie decimalen af te ronden.

- Onderzoek op hoeveel decimalen je de groeifactor per jaar moet afronden zodat $(g_{\text{jaar}})^{5730}$ afgerond op drie decimalen 0,500 is.

Mede omdat het werken met groeifactoren met veel decimalen onhandig is, wordt bij radioactief verval vaak als tijdseenheid de halveringstijd gekozen. Hierbij hoort de groeifactor $g_{5730 \text{ jaar}} = \frac{1}{2}$.
Met deze groeifactor kun je berekenen dat er na 10 000 jaar nog ongeveer 30% van de oorspronkelijke hoeveelheid $^{14}_{6}C$ over is.

- Bereken dit percentage in één decimaal.
- Bereken na hoeveel jaar er nog 20% van de oorspronkelijke hoeveelheid $^{14}_{6}C$ over is.

In 1991 werd in een gletsjer bij het Hauslabjoch in de Ötztaler Alpen op het grensgebied van Oostenrijk en Italië het lichaam gevonden van Ötzi, de gletsjerman. Radiologisch onderzoek wees uit dat het $^{14}_{6}C$ gehalte in zijn botten, afgerond op gehelen, 53% was van het gehalte bij levende mensen.

- Rond welk jaar is Ötzi overleden?

Ötzi

Is de ouderdom van botten bekend, dan heeft een wetenschapper de mogelijkheid om de $^{14}_{6}C$ methode op juistheid te controleren. Zo'n controle kan bijvoorbeeld worden uitgevoerd op stoffelijke resten die op een voormalig slagveld worden gevonden. Een mooi voorbeeld hiervan is de slag bij Trasimeno in Italië. In het jaar 217 voor Christus, in de ochtend van 24 juni, vernietigde het leger van Hannibal een Romeins leger van 25 000 man. Bij opgravingen werden veel resten van deze veldslag gevonden.
Een wetenschapper onderzocht op 24 juni 2006 de botten van een gesneuvelde Romeinse soldaat. Hij vond in de botten nog 77,3% van de oorspronkelijke hoeveelheid $^{14}_{6}C$.

- Hoeveel jaar afwijking levert dit meetresultaat op met de werkelijkheid?

Diagnostische toets

9.1 Rekenregels voor logaritmen

1 Bereken exact.

a $^{2}\log(18) - {}^{2}\log(36) + 3$

b $2 \cdot {}^{3}\log(5) - {}^{3}\log(75) + {}^{2}\log(8\sqrt{2})$

2 Herleid tot één logaritme.

a $4 + {}^{2}\log(a) + \log(100)$

b $2 - {}^{3}\log(6a)$

3 Schrijf in de vorm $a + {}^{g}\log(b)$ met a een zo groot mogelijk geheel getal en b geheel.

a $3 \cdot {}^{3}\log(36)$

b $3 + \log(800)$

4 **a** Welke vermenigvuldiging ten opzichte van de y-as levert bij de grafiek van de functie $f(x) = {}^{5}\log(x)$ dezelfde beeldgrafiek op als de translatie $(0, 2)$?

b Welke translatie levert bij de grafiek van de functie $g(x) = {}^{3}\log(x)$ dezelfde beeldgrafiek op als de vermenigvuldiging ten opzichte van de y-as met $\frac{1}{3}$?

5 Los exact op.

a $2 \cdot {}^{2}\log(x - 1) = 1 + {}^{2}\log(18)$

b $^{3}\log(2x - 1) + {}^{\frac{1}{3}}\log(x + 2) = 0$

c $^{2}\log(2x - 1) = {}^{4}\log(x)$

d $\log^{2}(x) = \log(x) + 2$

e $^{2}\log(x) = 3 - {}^{2}\log(x + 2)$

f $^{2}\log^{2}(x) + 12 = 7 \cdot {}^{2}\log(x)$

9.2 Exponentiële en logaritmische formules

6 Een hoeveelheid neemt per dag met 10% toe.

a Bereken het groeipercentage per week.

b Bereken het groeipercentage per 8 uur.

7 Een hoeveelheid neemt per jaar met 36% af.

a Hoeveel procent is de afname per maand?

b Hoeveel procent is de afname per 5 jaar?

8 **a** Bereken de verdubbelingstijd in jaren bij een toename van 0,2% per maand.

b Bereken de halveringstijd in dagen bij een afname van 20% per week.

9 **a** Schrijf de formule $y = 4 \cdot \log(3x + 12) - 1$ in de vorm $x = a + b \cdot g^{y}$. Rond b en g af op twee decimalen.

b Herleid de formule $p = 34 \cdot 2{,}7^{5q+2}$ tot de vorm $q = a + b \cdot \log(p)$. Rond a en b af op twee decimalen.

9.3 Het grondtal e

10 Herleid.

a $\dfrac{3\,e^3 - e^3}{e^2}$ **b** $\dfrac{e^{3x} - e^x}{e^x}$ **c** $(e^{3x} - 5)^2$

11 Los algebraïsch op.

a $3x\,e^x - e^x = 0$ **b** $e^{2x-1} - \sqrt[3]{e^2} = 0$ **c** $e^{2x} + 2\,e^x = 3$

12 Differentieer.

a $f(x) = 2\,e^x - 3x^2$ **c** $f(x) = (x^2 + 1)\,e^x$ **e** $f(x) = x^2 \cdot e^{2x-1}$

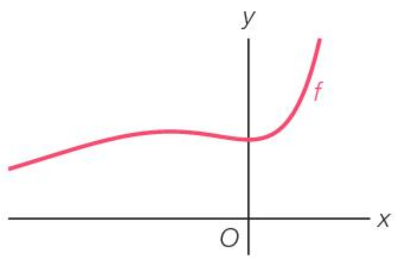
b $f(x) = \dfrac{x^2 + 1}{e^x}$ **d** $f(x) = \dfrac{e^x}{x^2 + 1}$ **f** $f(x) = e^{x^2+9}$

13 Gegeven is de functie $f(x) = (x^2 - x + 1)\,e^x$.

a Bereken exact de extreme waarden van f.

b Bereken exact de x-coördinaten van de buigpunten van de grafiek van f.

c Stel algebraïsch de formule op van de lijn k die de grafiek van f raakt in het punt A met $x_A = 1$.



figuur 9.17

9.4 De natuurlijke logaritme

14 Herleid tot één logaritme.

a $4 + \ln(3)$ **b** $\ln(10) - 4\ln(2)$

15 Los exact op.

a $2\,e^{5x} = 16$ **c** $2\ln^2(x) - \ln(x) = 0$

b $\ln^2(5x) = 16$ **d** $\ln(9x + 1) - \ln(x + 2) = \ln(4)$

16 Bereken de afgeleide.

a $f(x) = 2^{3x-4}$ **d** $f(x) = {}^2\log(4x)$

b $f(x) = x \cdot 3^x$ **e** $f(x) = {}^3\log(5x - 6)$

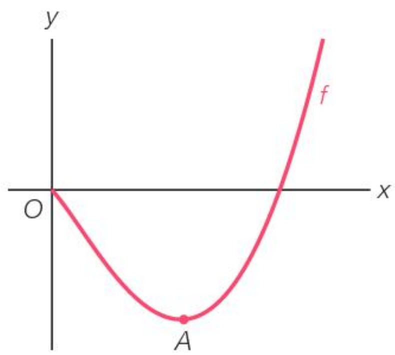
c $f(x) = \ln(x \cdot \sqrt[3]{x})$ **f** $f(x) = \ln(3x^2 + 3)$

17 Bereken algebraïsch het bereik van de functie $f(x) = 3^{x-1} + 3^{-x+1}$.

18 Gegeven is de functie $f(x) = x^2\ln(x) - \frac{1}{2}x^2$.

a Bereken exact de coördinaten van de top A van de grafiek van f.

b Stel algebraïsch de formule op van de buigraaklijn k van de grafiek van f.



figuur 9.18

10

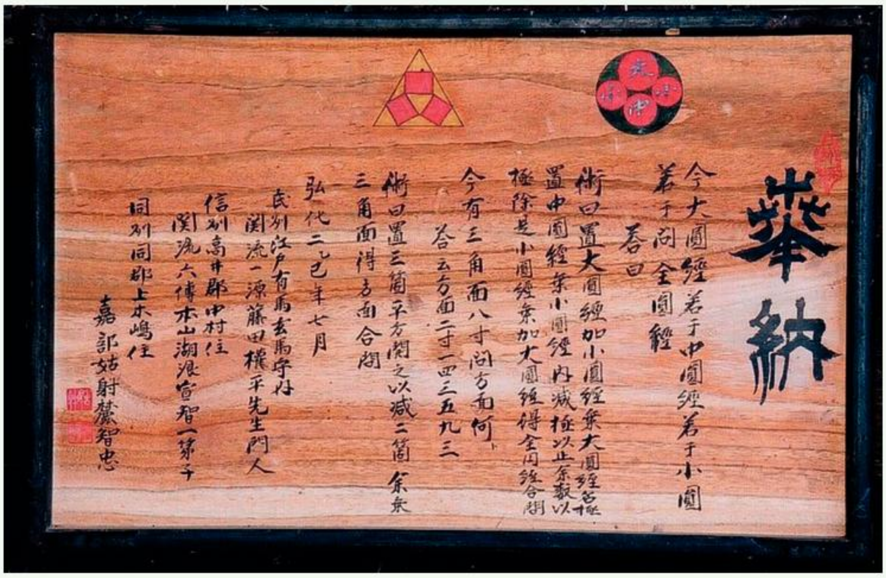
Meetkunde met vectoren

Wat leer je?

- Wat vectoren zijn.
- Werken met rotaties bij vectoren.
- Een vectorvoorstelling opstellen van een lijn.
- Het berekenen van hoeken met behulp van vectoren.
- Rekenen met snelheid en versnelling bij bewegingsvergelijkingen.

Beginopdracht Een sangaku met vijf vierkanten en een driehoek

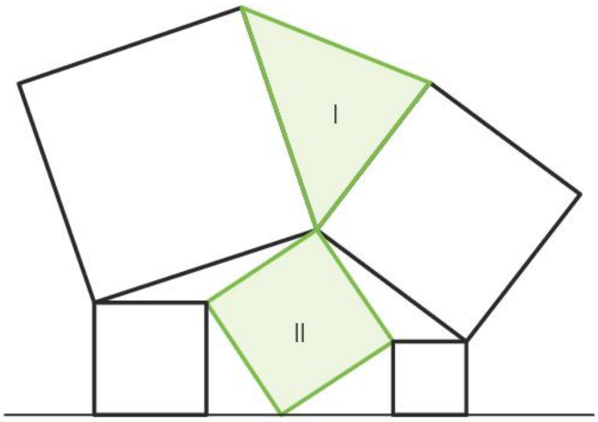
In de zeventiende eeuw werd Japan bestuurd door zogenaamde shoguns, militaire heersers die de macht bezaten. Omdat deze machthebbers hun eigen invloed wilden vergroten en bang waren voor dreigingen van buitenaf, werden in 1639 de Japanse grenzen gesloten. Hierbij werd ook de import van boeken aan banden gelegd. Deze situatie duurde tot 1854. De afsluiting van de buitenwereld had niet alleen negatieve gevolgen. Er brak bijvoorbeeld een periode van culturele bloei aan waarin ook de wiskunde, en dan met name de meetkunde, echt tot leven kwam in Japan. De voornaamste Japanse religie in die tijd was het Shintoïsme met meer dan achthonderd goden. Om deze goden allemaal tevreden te houden, moesten er geschenken worden gebracht aan de priesters in de tempels. De algemene opinie was dat de goden veel van paarden hielden, die dan ook een populair geschenk vormden. Omdat niet iedereen een paard kon betalen, werden ook tekeningen van paarden geschonken. Deze tekeningen werden op houten planken gemaakt, die door de priesters in de tempels konden worden opgehangen.
In de loop van de tijd verschenen er ook andere afbeeldingen op de houten tabletten, waaronder een groot aantal meetkundige figuren. Een verklaring hiervoor zou kunnen zijn dat men in de Japanse cultuur altijd veel belang heeft gehecht aan vormen en natuurlijke schoonheid, twee aspecten die binnen de meetkunde aan bod komen. Mensen uit alle lagen van de bevolking die de goden wilden danken met een wiskundige stelling die ze hadden bedacht, tekenden deze om aan een tempel te schenken. Op deze manier konden ze hun ontdekkingen en resultaten wereldkundig maken. Deze zogenaamde sangaku's werden meestal zonder bewijs geleverd.



Een sangaku uit 1845 in de Ten'nenji Temple te Nagano.

Aangezien er door de isolatie geen buitenlandse wiskundige literatuur voorhanden was, ontwikkelde de Japanse meetkunde zich onafhankelijk van de rest van de wereld waardoor ze een ander karakter kreeg dan de meetkunde zoals wij die tegenwoordig kennen.
Bron: Pythagoras, juni 1999

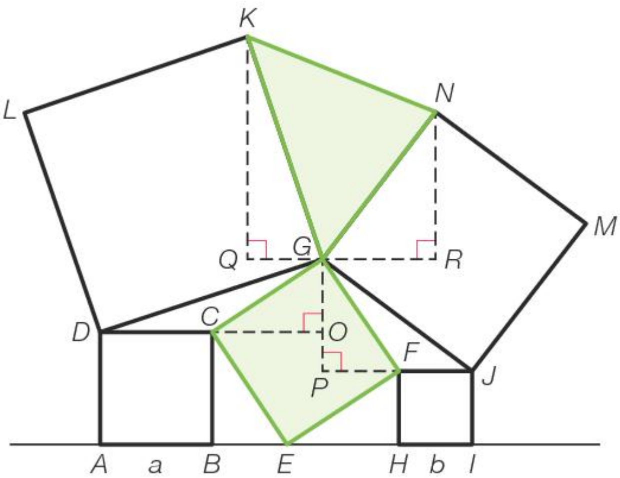
Hiernaast zie je een sangaku met vijf vierkanten en een driehoek. Je gaat in deze beginopdracht een bewijs geven van de stelling die in de sangaku is uitgebeeld.



$O(\mathrm{I}) = O(\mathrm{II})$

Zie de figuur hiernaast. De lengte van de zijde van vierkant *ABCD* is a en de lengte van de zijde van vierkant *FHIJ* is b.

- Bewijs achtereenvolgens. Gebruik daarbij steeds gelijkvormige driehoeken.
  1 $BE = b$ en $EH = a$
  2 $CO = a$ en $GO = b$
  3 $FP = b$ en $GP = a$
  4 $KQ = 2a$ en $GQ = b$
  5 $GR = a$ en $NR = 2b$
- Druk de oppervlakte van vierhoek *KNRQ* uit in a en b en maak het bewijs af.



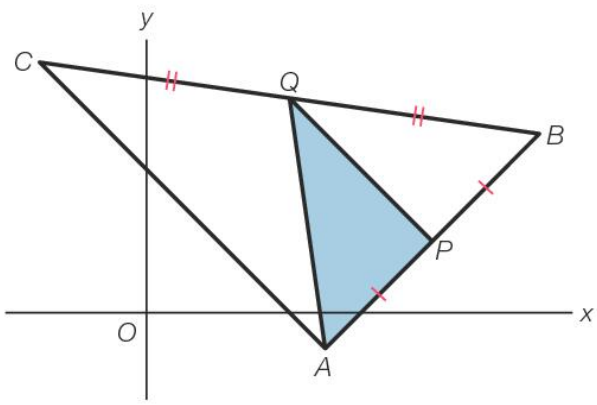
Voorkennis Afstanden en middens

Theorie A De afstand tussen twee punten

De afstand tussen de punten A en B is de lengte van het lijnstuk AB.
Voor de lengte van het lijnstuk AB bestaat de notatie $d(A, B)$.
Voor de punten $A(x_A, y_A)$ en $B(x_B, y_B)$ geldt
$d(A, B) = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$.
De coördinaten van het midden M van het lijnstuk AB zijn
$x_M = \frac{1}{2}(x_A + x_B)$ en $y_M = \frac{1}{2}(y_A + y_B)$.

Zijn gegeven de punten $P(-2, 3)$ en $Q(6, -1)$ en is R het midden van het lijnstuk PQ, dan is
$d(P, Q) = \sqrt{(6 - -2)^2 + (-1 - 3)^2} = \sqrt{8^2 + (-4)^2} = \sqrt{80} = 4\sqrt{5}$
en $R(\frac{1}{2}(-2 + 6), \frac{1}{2}(3 + -1)) = R(2, 1)$.

1 Gegeven is driehoek ABC met de hoekpunten $A(5, -1)$, $B(11, 5)$ en $C(-3, 7)$.
Het punt P is het midden van de zijde AB en het punt Q is het midden van de zijde BC.
Bereken de omtrek van driehoek APQ.
Schrijf je antwoord in de vorm $a\sqrt{b}$ met b een zo klein mogelijk geheel getal.



figuur 10.1

2 Gegeven zijn de punten $A(-2, p)$ en $B(p + 1, 5)$.

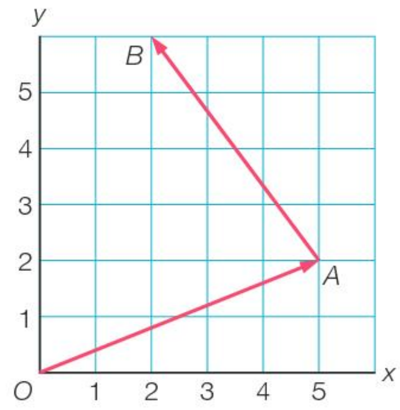
a Neem $p = 3$ en bereken exact de afstand tussen A en B.
b Bereken exact de afstand tussen A en B in het geval de x-coördinaat van het midden van het lijnstuk AB gelijk is aan -6.
c Gegeven is dat het midden M van het lijnstuk AB op de lijn $y = -x$ ligt. Bereken exact de lengte van het lijnstuk AM.

Voor de afstand tussen A en B geldt $d(A, B) = \sqrt{2p^2 - 4p + 34}$.

d Toon dit aan.
e Bereken exact voor welke p de afstand tussen A en B kleiner is dan 8.

10.1 Vectoren

01 Bij een wandeling in het assenstelsel hiernaast ga je eerst van O naar A en daarna van A naar B.
Bereken exact de lengte van deze wandeling.



figuur 10.2

Theorie A Vectoren optellen en aftrekken

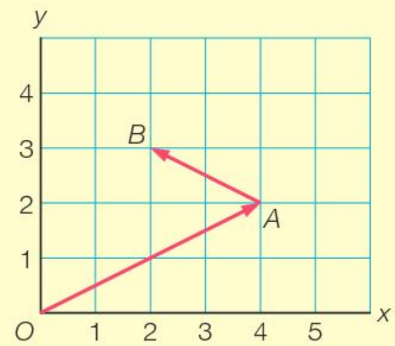
In de figuur hiernaast zijn in een assenstelsel de pijlen van O naar $A(4, 2)$ en van A naar $B(2, 3)$ getekend.
Deze pijlen heten **vectoren**.

Notatie: $\overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ en $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$\overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ spreek je uit als 'de vector OA is vier twee'.

De getallen 4 en 2 zijn de **kentallen** van $\overrightarrow{OA}$.
Een vector die in O begint wordt vaak genoteerd met een kleine letter. Zo wordt de vector $\overrightarrow{OA}$ genoteerd als $\vec{a}$.

Dus $\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$.

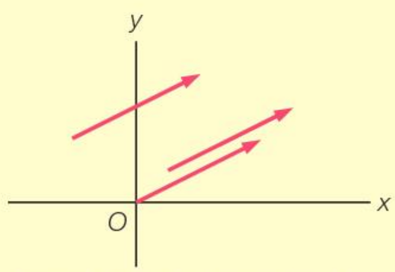


figuur 10.3

Een vector heeft zowel een **richting** als een **lengte**. De lengte van de vector $\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ is te berekenen met de stelling van Pythagoras.
De lengte is $\sqrt{4^2 + 2^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$. Notatie: $|\vec{a}| = 2\sqrt{5}$.
Uitspraak: de lengte van vector a is twee wortel vijf.

Een vector is een lijnstuk met een richting.
De lengte van de vector $\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$ is $\left|\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}\right| = \sqrt{p^2 + q^2}$.

Je hebt te maken met **gelijke vectoren** als ze dezelfde richting en dezelfde lengte hebben. In de figuur hiernaast zie je drie gelijke vectoren.



figuur 10.4 Gelijke vectoren.

Je kunt vectoren optellen. Je krijgt dan de **somvector**.
Voor het tekenen van een somvector zijn er twee manieren.

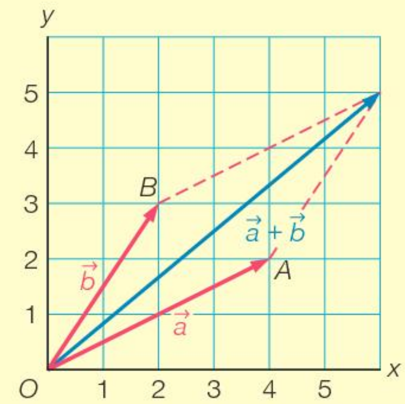
De parallellogramconstructie

In figuur 10.5 is deze constructie uitgevoerd met de vectoren $\vec{a} = \begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}$ en $\vec{b} = \begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$.

Je ziet dat $\vec{a} + \vec{b}$ de diagonaal is van het parallellogram waarvan $\vec{a}$ en $\vec{b}$ zijden zijn.

Ga na dat $\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}6\\5\end{pmatrix}$.

De kentallen van de somvector krijg je door de overeenkomstige kentallen van de vectoren op te tellen.



figuur 10.5 De parallellogramconstructie.

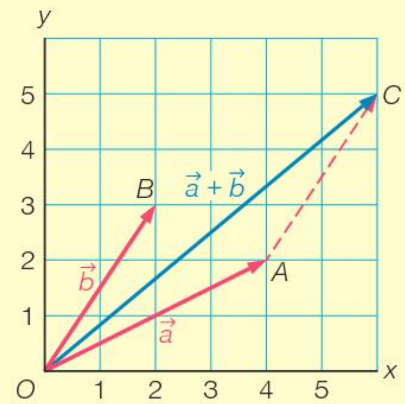
De kop-staartconstructie

Deze constructie is in figuur 10.6 uitgevoerd met de vectoren $\vec{a} = \begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}$ en $\vec{b} = \begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$.

Vector $\vec{b}$ wordt verschoven waarbij zijn 'staart' aansluit bij de 'kop' van $\vec{a}$.

Merk op dat hier gebruikt is dat $\overrightarrow{AC}$ en $\overrightarrow{OB}$ gelijke vectoren zijn, dus dat $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OB}$.

Ga na dat je $\vec{a} + \vec{b}$ ook kunt krijgen door $\vec{a}$ met zijn staart aan te sluiten bij de kop van $\vec{b}$.



figuur 10.6 De kop-staartconstructie.

Je kunt een vector ook met een getal vermenigvuldigen.
In figuur 10.7 zie je de vectoren $\vec{a}$ en $1\frac{1}{2}\vec{a}$.

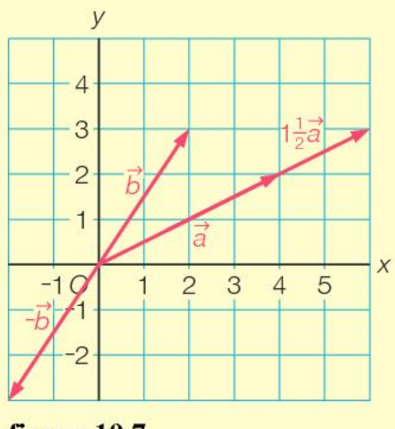
Omdat $\vec{a} = \begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}$ is $1\frac{1}{2}\vec{a} = 1\frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}6\\3\end{pmatrix}$.

Ook zie je de vectoren $\vec{b}$ en $-1 \cdot \vec{b}$ oftewel $-\vec{b}$.

Omdat $\vec{b} = \begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$ is $-\vec{b} = -\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\\-3\end{pmatrix}$.

De vectoren $\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$ en $-\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$ heten **tegengestelde vectoren**.

Tegengestelde vectoren hebben dezelfde lengte en tegengestelde richting.



figuur 10.7

Voor $\vec{s} = 1\frac{1}{2}\vec{a} - \vec{b}$ geldt $\vec{s} = 1\frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}6\\3\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\0\end{pmatrix}$.

Voor de vectoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix}$ en $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \end{pmatrix}$ geldt

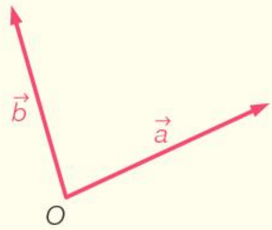
$$\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} a_x + b_x \\ a_y + b_y \end{pmatrix}$$

$$c \cdot \vec{a} = \begin{pmatrix} c \cdot a_x \\ c \cdot a_y \end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix}$ **en** $-\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix}$ **zijn tegengestelde vectoren.**

Voorbeeld

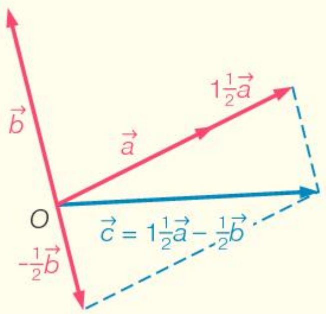
In de figuur hiernaast zijn $\vec{a}$ en $\vec{b}$ getekend.
Teken $\vec{c} = 1\frac{1}{2}\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b}$.



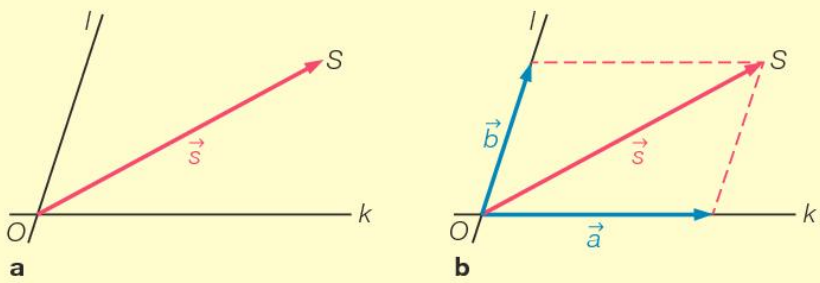
figuur 10.8

Aanpak
Teken eerst $1\frac{1}{2}\vec{a}$ en $-\frac{1}{2}\vec{b}$.

Uitwerking



In figuur 10.9a is de vector $\vec{s}$ getekend. Verder is gegeven dat de vector $\vec{a}$ op lijn k ligt en de vector $\vec{b}$ op lijn l waarbij $\vec{a} + \vec{b} = \vec{s}$. Door een parallellogram te tekenen waarvan OS een diagonaal is, zoals in figuur 10.9b, zijn de vectoren $\vec{a}$ en $\vec{b}$ te tekenen. We zeggen dat we de vector $\vec{s}$ hebben **ontbonden in de componenten** $\vec{a}$ en $\vec{b}$.

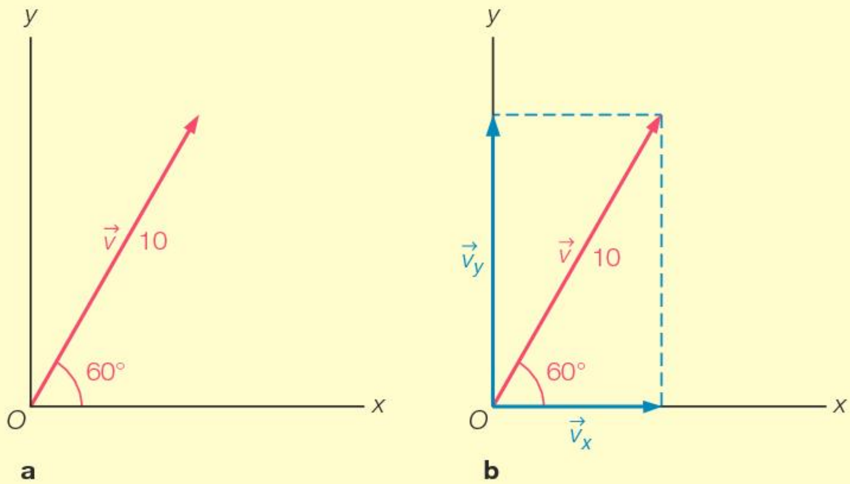


figuur 10.9

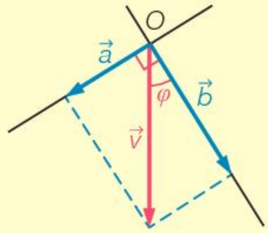
In figuur 10.10a zie je de vector $\vec{v}$ met lengte 10 die een hoek van 60° maakt met de x-as. De vector $\vec{v}$ is in figuur 10.10b ontbonden in de **onderling loodrechte componenten** $\vec{v}_x$ en $\vec{v}_y$.
Van deze componenten is de lengte te berekenen.

Omdat $\cos(60°) = \dfrac{|\vec{v}_x|}{10}$ is $|\vec{v}_x| = 10\cos(60°) = 10 \cdot \frac{1}{2} = 5$ en

omdat $\sin(60°) = \dfrac{|\vec{v}_y|}{10}$ is $|\vec{v}_y| = 10\sin(60°) = 10 \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3} = 5\sqrt{3}$.



figuur 10.10



figuur 10.11

De vector $\vec{v}$ hiernaast is ontbonden in de twee onderling loodrechte componenten $\vec{a}$ en $\vec{b}$. Er geldt $|\vec{a}| = |\vec{v}| \cdot \sin(\varphi)$ en $|\vec{b}| = |\vec{v}| \cdot \cos(\varphi)$.

R2 Zie figuur 10.11.

a Bereken $|\vec{a}|$ en $|\vec{b}|$ in het geval $\varphi = 17°$ en $|\vec{v}| = 8$. Rond af op twee decimalen.

b Bereken $|\vec{b}|$ en $|\vec{v}|$ in het geval $\varphi = 26°$ en $|\vec{a}| = 1{,}5$. Rond af op twee decimalen.

3 Bereken de lengte van de volgende vectoren.

a $\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$

b $\vec{b} = \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ \sqrt{6} \end{pmatrix}$

c $\vec{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix}$

d $\vec{d} = \begin{pmatrix} -0{,}3 \\ 0{,}4 \end{pmatrix}$

e $\vec{e} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

f $\vec{f} = 0{,}6 \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \end{pmatrix}$

4 Gegeven zijn de vectoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ en $\vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}$.
Bereken de kentallen van de volgende vectoren.

a $\vec{c} = 2\vec{a} + 3\vec{b}$

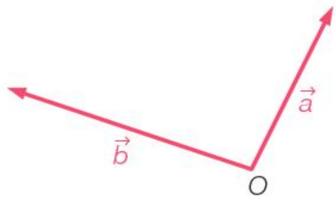
b $\vec{d} = \vec{a} - 2\vec{b}$

c $\vec{e} = 4\vec{a} - 3\vec{b}$

d $\vec{f} = 2 \cdot (\vec{a} + \vec{b})$

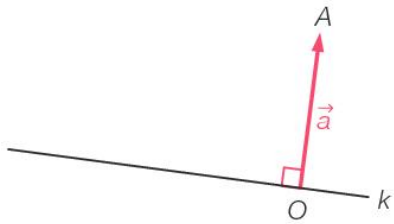
5 [▸ WERKBLAD] Gegeven zijn de vectoren $\vec{a}$ en $\vec{b}$ in figuur 10.12.
Teken de volgende vectoren.

a $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$
b $\vec{d} = \vec{a} - \vec{b}$
c $\vec{e} = 2\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b}$
d $\vec{f} = -3\vec{a} + 1\frac{1}{2}\vec{b}$



figuur 10.12

6 [▸ WERKBLAD] Gegeven is de vector $\vec{a}$ met lengte 2 die loodrecht staat op de lijn k. Zie figuur 10.13. Verder is gegeven dat vector $\vec{c}$ lengte 5 heeft en dat vector $\vec{b}$ op k ligt waarbij $\vec{b} = \vec{a} + \vec{c}$.
Teken $\vec{c}$. Gebruik daarbij een parallellogram met zijden 2 en 5 waarvan een diagonaal op k ligt. Er zijn twee mogelijkheden. Licht je tekening toe.



figuur 10.13

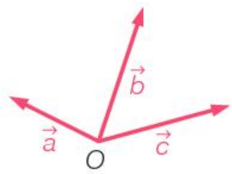
7
a Uit de kop-staart constructie volgt $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.
Licht dit toe met een tekening.
b Vul in $\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PQ} = ...$
c Vul in $\overrightarrow{DE} + ... = \overrightarrow{DF}$.
d Vul in $... + \overrightarrow{KL} = \overrightarrow{AL}$.
e Vul in $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MP} + ...$

8 Gegeven zijn de punten A en B en de vectoren $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ en $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$.
Er geldt $\overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a}$.
a Toon dit aan.
b Het punt M is het midden van het lijnstuk AB.
Toon aan dat voor $\vec{m} = \overrightarrow{OM}$ geldt $\vec{m} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b})$.
c Gegeven zijn de punten $P(7, 2)$ en $Q(3, 5)$. Het punt R is het midden van lijnstuk PQ.
Bereken de kentallen van de vectoren $\overrightarrow{PQ}$, $\overrightarrow{QP}$, $\overrightarrow{OR}$ en $\overrightarrow{QR}$.

> Voor het lijnstuk AB met midden M geldt $\overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a}$ en $\vec{m} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b})$.

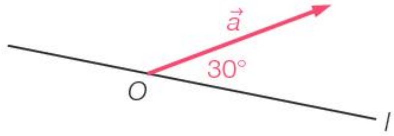
A9 [▸ WERKBLAD] Gegeven zijn de vectoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ en $\vec{c}$ in figuur 10.14.
Teken de volgende vectoren.

a $\vec{u} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$
b $\vec{v} = \vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$
c $\vec{w} = 2\vec{a} - \vec{b} + 1\frac{1}{2}\vec{c}$
d $\vec{x} = \vec{a} - (\vec{b} + 2\vec{c})$



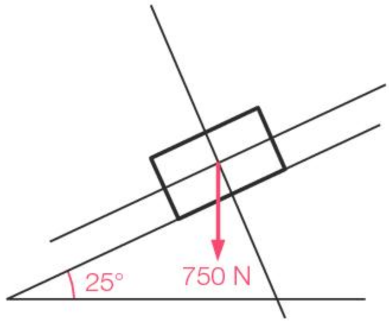
figuur 10.14

A10 [▸ WERKBLAD] Gegeven is de vector $\vec{a}$ met lengte 4 die een hoek van 30° maakt met de lijn l. Zie figuur 10.15.
Verder is gegeven dat vector $\vec{c}$ lengte 6 heeft en dat vector $\vec{b}$ op l ligt waarbij $\vec{b} = \vec{a} + \vec{c}$.
Teken de twee mogelijkheden van $\vec{c}$.



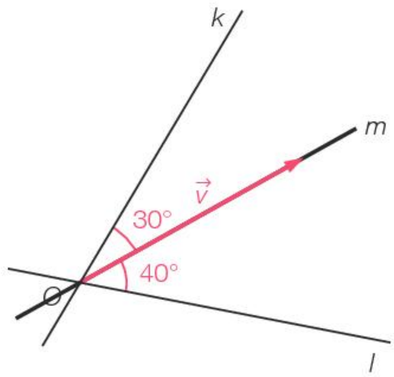
figuur 10.15

A11 In de figuur hiernaast staat een kist op een helling die een hoek van 25° met het horizontale vlak maakt. De zwaartekracht die op de kist werkt is 750 newton. Ontbind deze kracht in een component langs de helling en een component loodrecht op de helling. Bereken deze componenten in newton. Rond af op gehelen.



figuur 10.16

A12 Gegeven is de vector $\vec{v}$ met lengte 12 die op de lijn m ligt. De vector kan worden ontbonden in de vectoren $\vec{a}$ en $\vec{b}$ waarbij $\vec{a}$ op de lijn k ligt en $\vec{b}$ op de lijn l. Er is gegeven dat $\angle(k, m) = 30°$ en $\angle(l, m) = 40°$. Zie figuur 10.17.
Bereken $|\vec{a}|$ en $|\vec{b}|$. Rond af op één decimaal.



figuur 10.17

GESCHIEDENIS

Het ontstaan van de vectormeetkunde

William Rowan Hamilton

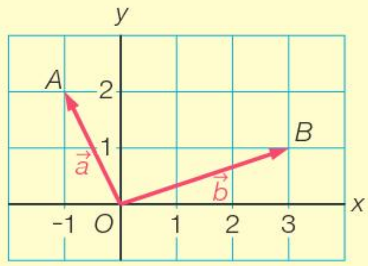
De vectormeetkunde is in de eerste helft van de 19e eeuw ontstaan. Daarvoor werden er echter ook al problemen met vectoren opgelost. Zo kwam Newton in 1687 met het idee om krachten op te tellen via de parallellogramconstructie. Daarnaast bleken vectoren een praktisch hulpmiddel om complexe getallen meetkundig weer te geven. Diverse wiskundigen opperden hier aan het eind van de 18e eeuw ideeën voor, maar die werden pas serieus genomen toen Gauss er in 1831 een publicatie aan wijdde. De briljante Ierse wis- en natuurkundige William Rowan Hamilton (1804-1865) werkte de principes van Gauss succesvol uit. Als kleine jongen sprak Hamilton liefst dertien talen. Zijn interesse verschoof echter geleidelijk naar de exacte vakken nadat hij op achtjarige leeftijd kennismaakte met het Amerikaanse rekenwonder Zerah Colburn. Als jonge twintiger publiceerde Hamilton al opvallende resultaten in de optica. In zijn verdere carrière werkte hij de vectormeetkunde uit tot een volwaardig systeem. In een publicatie uit 1846 gebruikte hij voor het eerst het woord vector.

Terugblik

Vectoren optellen en aftrekken

Een vector is een lijnstuk met een richting.

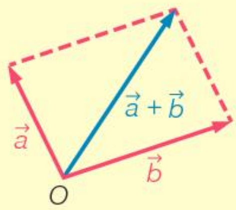
In de figuur hiernaast zijn de vectoren $\overrightarrow{OA} = \vec{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ en $\overrightarrow{OB} = \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ getekend.



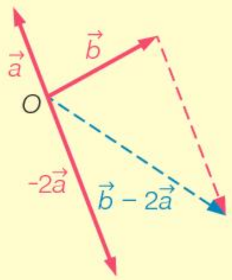
De lengte van $\vec{a}$ is $|\vec{a}| = \sqrt{(-1)^2 + 2^2} = \sqrt{5}$.

De somvector $\vec{s}$ van $\vec{a}$ en $\vec{b}$ is $\vec{s} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

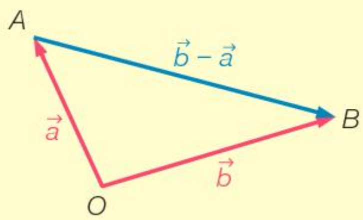
Voor het optellen van $\vec{a}$ en $\vec{b}$ in de figuur hiernaast is de parallellogramconstructie gebruikt.



Voor het tekenen van $\vec{b} - 2\vec{a}$ in de figuur hiernaast is de kopstaartconstructie gebruikt. Eerst is de vector $-2\vec{a}$ getekend. Daarna is deze kopstaart gelegd met $\vec{b}$.

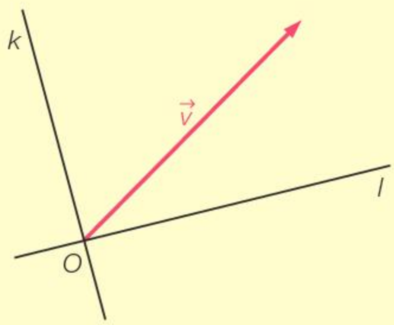


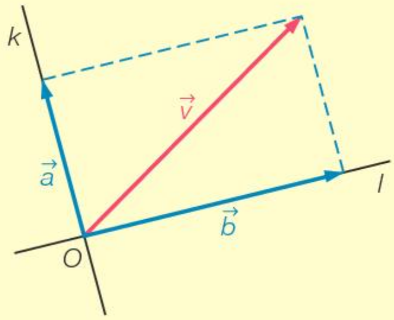
Voor de vectoren $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ en $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ geldt $\overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a}$.
Is M het midden van het lijnstuk AB, dan geldt voor $\vec{m} = \overrightarrow{OM}$ dat $\vec{m} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b})$.



Een vector ontbinden in componenten

De vector $\vec{v}$ in de figuur hiernaast is te ontbinden in de componenten $\vec{a}$ en $\vec{b}$ waarbij $\vec{a}$ op lijn k en $\vec{b}$ op lijn l ligt. Hierbij gebruik je een parallellogram. Zie de figuur eronder.
In het geval $k \perp l$ wordt $\vec{v}$ ontbonden in twee onderling loodrechte componenten.





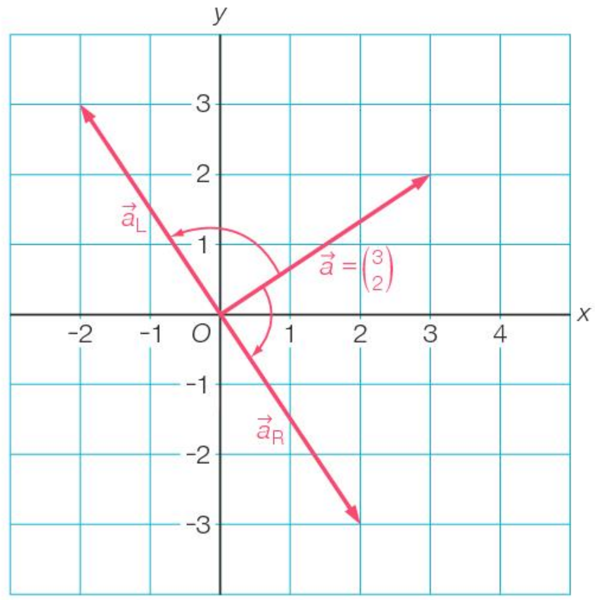
10.2 Vectoren en rotaties

013 In figuur 10.18 zijn de vectoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{a}_R$ en $\vec{a}_L$ getekend.
De vector $\vec{a}_R$ ontstaat uit $\vec{a}$ door $\vec{a}$ over 90° rechtsom te draaien en de vector $\vec{a}_L$ ontstaat uit $\vec{a}$ door $\vec{a}$ over 90° linksom te draaien.

a Geef de kentallen van $\vec{a}_R$ en van $\vec{a}_L$.

De vector $\vec{b} = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$ wordt over 90° rechtsom gedraaid. Zo ontstaat $\vec{b}_R$.

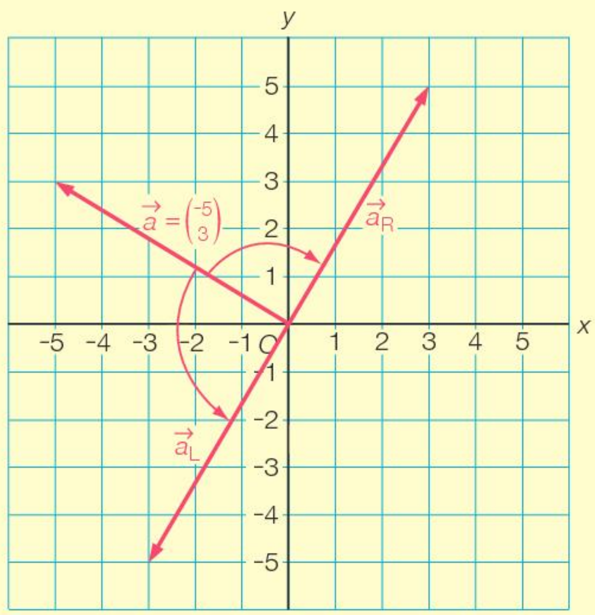
b Geef de kentallen van $\vec{b}_R$.



figuur 10.18

Theorie A Rotaties en coördinaten

In figuur 10.19 zie je de vectoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{a}_R$ en $\vec{a}_L$.
De vector $\vec{a}_R$ ontstaat uit $\vec{a}$ door $\vec{a}$ over 90° rechtsom te draaien en de vector $\vec{a}_L$ ontstaat uit $\vec{a}$ door $\vec{a}$ over 90° linksom te draaien.
Je ziet $\vec{a}_R = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$ en $\vec{a}_L = \begin{pmatrix} -3 \\ -5 \end{pmatrix}$.



figuur 10.19

$\vec{a} = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$ rechtsom draaien over 90° geeft $\vec{a}_R = \begin{pmatrix} q \\ -p \end{pmatrix}$.
$\vec{a} = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$ linksom draaien over 90° geeft $\vec{a}_L = \begin{pmatrix} -q \\ p \end{pmatrix}$.

In figuur 10.20 is het vierkant $ABCD$ getekend met $A(3, 2)$ en $B(7, 3)$. Om de coördinaten van C te vinden, bedenk je dat $\vec{c} = \vec{b} + \overrightarrow{BC} = \vec{b} + \overrightarrow{BA}_R$.

Omdat $\overrightarrow{BA} = \vec{a} - \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \end{pmatrix}$ is

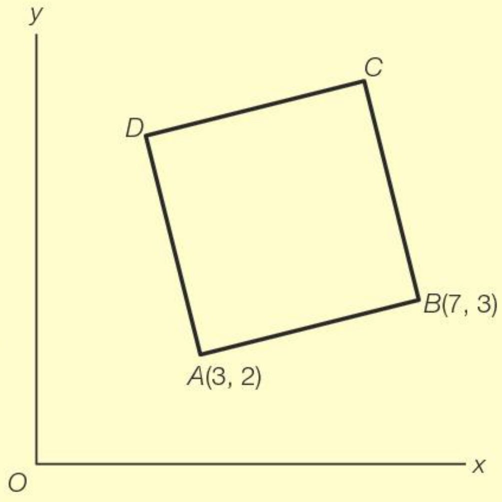
$\overrightarrow{BA}_R = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Je krijgt $\vec{c} = \vec{b} + \overrightarrow{BA}_R = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \end{pmatrix}$, dus $C(6, 7)$.

Om de coördinaten van D te vinden, bedenk je dat $\vec{d} = \vec{a} + \overrightarrow{AD} = \vec{a} + \overrightarrow{AB}_L$.

Omdat $\overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a} = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ is $\overrightarrow{AB}_L = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}$.

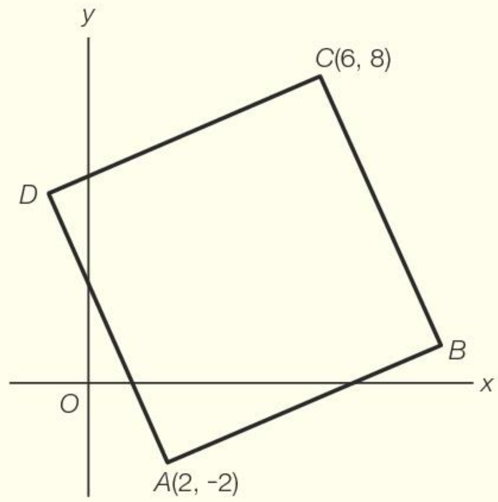
Dit geeft $\vec{d} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}$, dus $D(2, 6)$.



figuur 10.20

Voorbeeld

In figuur 10.21 is het vierkant $ABCD$ getekend met $A(2, -2)$ en $C(6, 8)$.
Bereken de coördinaten van B.



figuur 10.21

Uitwerking

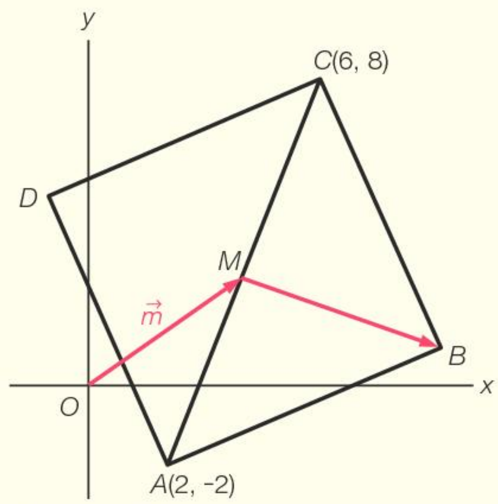
M is het midden van diagonaal AC.

$\vec{b} = \vec{m} + \overrightarrow{MB} = \vec{m} + \overrightarrow{MA}_L$

$\vec{m} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{c}) = \frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \end{pmatrix}\right) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 8 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{MA} = \vec{a} - \vec{m} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -5 \end{pmatrix}$, dus $\overrightarrow{MA}_L = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Dit geeft $\vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 1 \end{pmatrix}$, dus $B(9, 1)$.



figuur 10.22

14 Zie het voorbeeld.
Bereken de coördinaten van D.

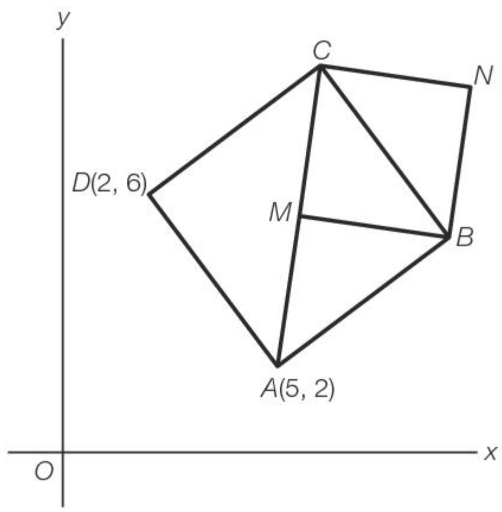
15

Gegeven is het vierkant $ABCD$ met $A(5, 2)$ en $D(2, 6)$ in figuur 10.22.
Er geldt $B(9, 5)$.

a Toon aan dat de coördinaten van B juist zijn.

Verder is het punt M het midden van diagonaal AC. Ook is het vierkant $MBNC$ getekend.

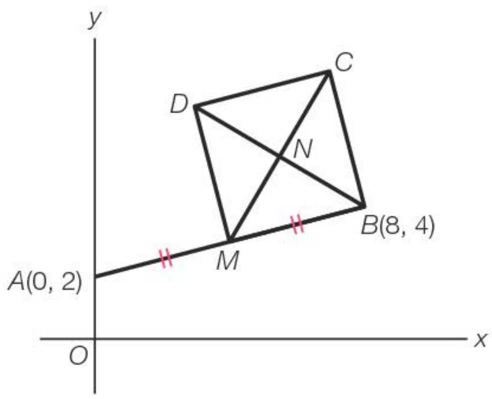
b Bereken de coördinaten van N.



figuur 10.22

16

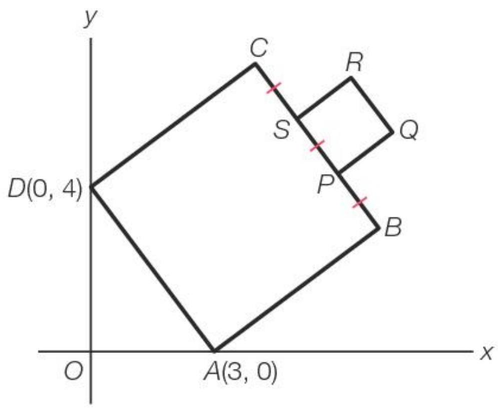
Gegeven zijn de punten $A(0, 2)$ en $B(8, 4)$ in figuur 10.23. Het punt M is het midden van het lijnstuk AB. Ook is het vierkant $MBCD$ getekend. Bereken de coördinaten van het midden N van het vierkant.



figuur 10.23

A17

Gegeven is het vierkant $ABCD$ met $A(3, 0)$ en $D(0, 4)$. Op zijde BC liggen de punten P en S waarbij $BP = PS = SC$.
PS is een zijde van het vierkant $PQRS$.
Zie figuur 10.24.
Bereken de coördinaten van de punten Q en R.



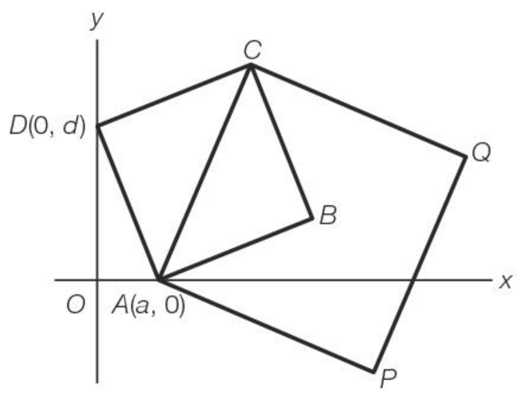
figuur 10.24

18

Gegeven is het vierkant $ABCD$ met $A(a, 0)$ en $D(0, d)$. Diagonaal AC is een zijde van het vierkant $APQC$. Zie figuur 10.25.
Er geldt $P(2a + d, a - d)$.

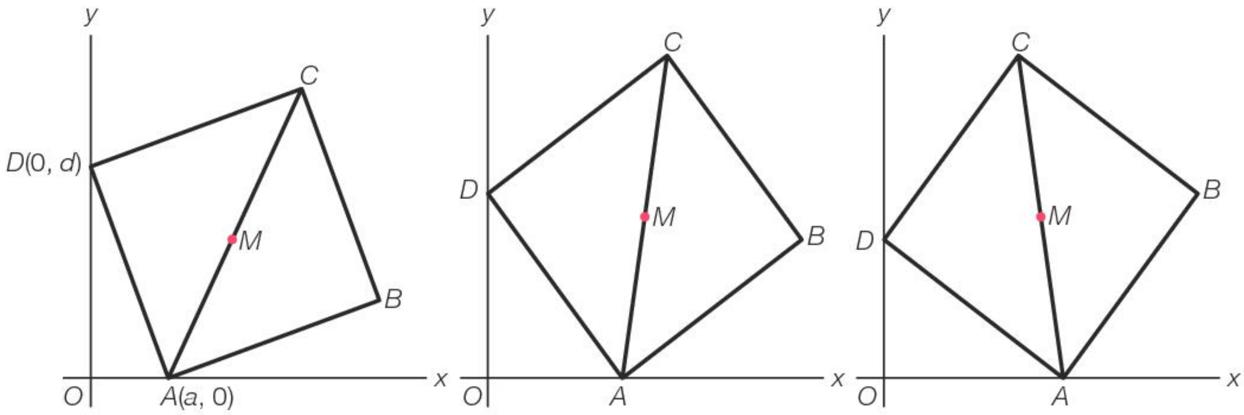
a Bewijs dit.

b Druk de coördinaten van Q uit in a en d.



figuur 10.25

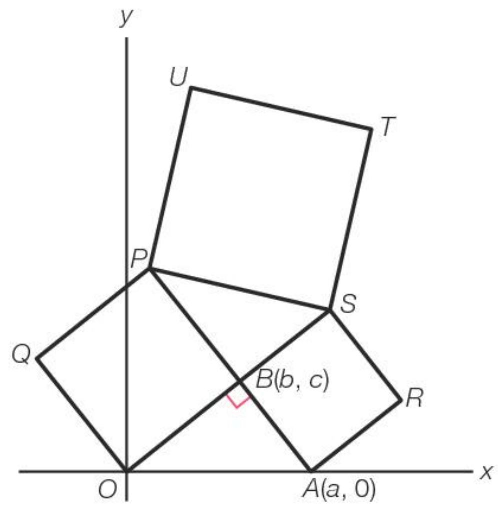
19 ◻⊙∗ Van het vierkant *ABCD* ligt het punt $A(a, 0)$ op de positieve x-as en het punt $D(0, d)$ op de positieve y-as.
Het punt M is het midden van diagonaal AC.
In figuur 10.26 zie je enkele mogelijkheden.



figuur 10.26

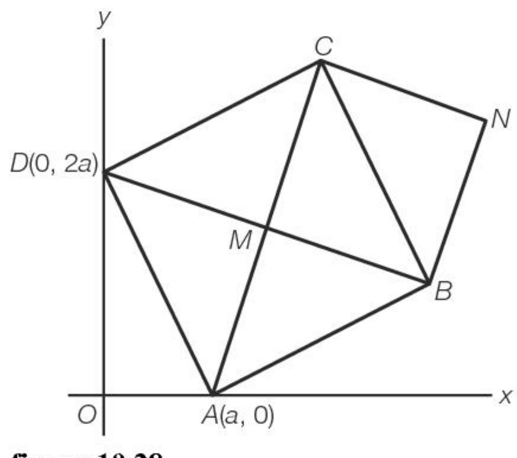
a Druk de coördinaten van M uit in a en d en licht toe dat M op de lijn $y = x$ ligt.
b Bewijs dat de lengte van het lijnstuk OM gelijk is aan $\frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot (a + d)$.

A20 ◻⊙∗ In figuur 10.27 is de rechthoekige driehoek *OAB* getekend met $\angle B = 90°$, $A(a, 0)$ en $B(b, c)$.
Op de zijden *OB* en *AB* zijn de vierkanten *OBPQ* en *ARSB* getekend.
PS is een zijde van het vierkant *PSTU*.
Druk de coördinaten van T en U uit in a, b en c.



figuur 10.27

A21 ∗ Van het vierkant *ABCD* ligt het punt $A(a, 0)$ op de positieve x-as en het punt $D(0, 2a)$ op de positieve y-as. Het punt M is het snijpunt van de diagonalen van *ABCD*.
BM is een zijde van het vierkant *BNCM*. Zie figuur 10.28.
Voor elke waarde van a ligt het punt N op de lijn $y = mx$.
Bereken m.



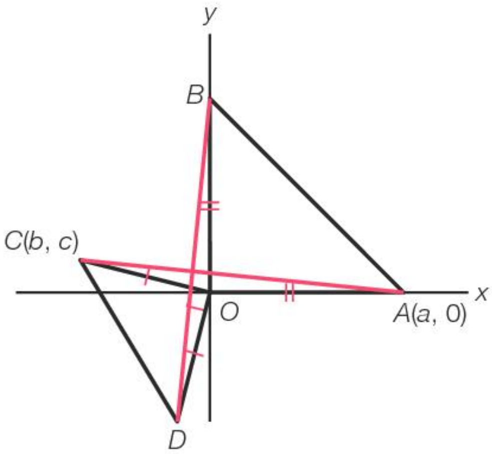
figuur 10.28

22

Gegeven zijn de punten $A(a, 0)$ en $C(b, c)$ en de gelijkbenige rechthoekige driehoeken OAB en OCD. Zie figuur 10.29.
In deze opgave ga je bewijzen dat $AC = BD$ en $AC \perp BD$.

a Toon aan dat $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} b-a \\ c \end{pmatrix}$ en $\overrightarrow{BD} = \begin{pmatrix} -c \\ b-a \end{pmatrix}$.

b Maak het bewijs af.

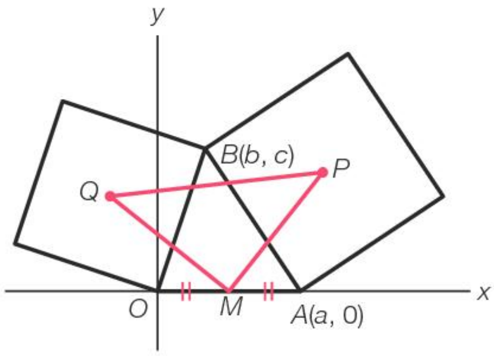


figuur 10.29

23

Gegeven zijn de punten $A(a, 0)$ en $B(b, c)$ en driehoek OAB. Op de zijden AB en OB van driehoek OAB zijn vierkanten geplaatst. De middens van deze vierkanten zijn P en Q.
Het punt M is het midden van zijde OA. Zie figuur 10.30.

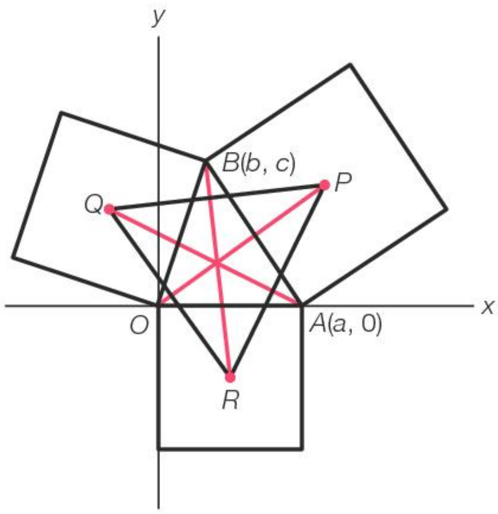
Bewijs dat $\overrightarrow{MP} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} b+c \\ a-b+c \end{pmatrix}$ en $\overrightarrow{MQ} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -a+b-c \\ b+c \end{pmatrix}$ en licht toe dat hieruit volgt dat MPQ een gelijkbenige rechthoekige driehoek is.



figuur 10.30

A24

Gegeven zijn de punten $A(a, 0)$ en $B(b, c)$ en driehoek OAB. Op de zijden van driehoek OAB zijn vierkanten geplaatst. De middens van deze vierkanten zijn P, Q en R. Zie figuur 10.31.
Bewijs dat $OP \perp QR$, $AQ \perp PR$ en $BR \perp PQ$.



figuur 10.31

25 *

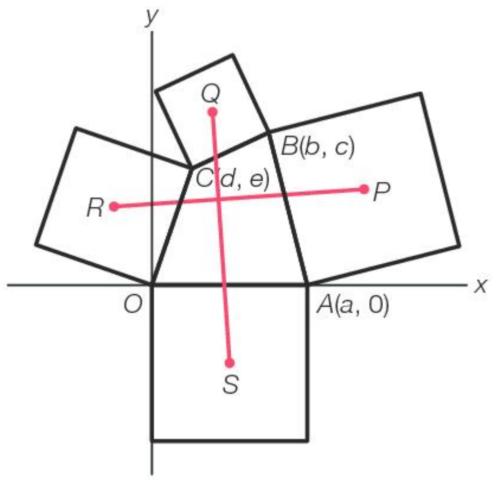
Gegeven zijn de punten $A(a, 0)$, $B(b, c)$ en $C(d, e)$ en vierhoek $OABC$. Op de zijden van vierhoek $OABC$ zijn vierkanten geplaatst. De middens van deze vierkanten zijn P, Q, R en S. Zie figuur 10.32.

Er geldt $\vec{p} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} a+b+c \\ a-b+c \end{pmatrix}$, $\vec{q} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} b-c+d+e \\ b+c-d+e \end{pmatrix}$,

$\vec{r} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} d-e \\ d+e \end{pmatrix}$ en $\vec{s} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} a \\ -a \end{pmatrix}$.

a Bewijs dit.

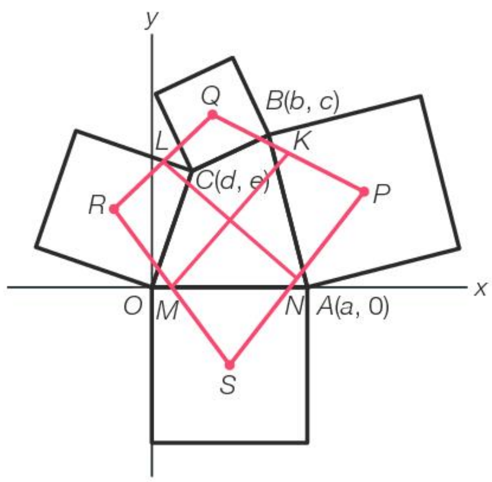
b Bewijs dat $PR = QS$ en $PR \perp QS$.



figuur 10.32

A26 *

Gegeven is vierhoek $OABC$ van opgave 25 met de op de zijden geplaatste vierkanten met middens P, Q, R en S. De punten K, L, M en N zijn de middens van de zijden van $PQRS$. Zie figuur 10.33. Bewijs dat $KM = LN$ en $KM \perp LN$.



figuur 10.33

INFORMATIEF

De stelling van Van Aubel

Van Aubel

In opgave 25 heb je de stelling van Van Aubel bewezen.
Deze stelling is genoemd naar Henricus Hubertus van Aubel (1830-1906) en luidt algemeen als volgt:
De verbindingslijnstukken van de middens van tegenoverliggende vierkanten die (buitenwaarts) beschreven zijn op de zijden van een vierhoek, staan loodrecht op elkaar en zijn even lang.
Je kunt de stelling van Van Aubel goed verifiëren met het computerprogramma GeoGebra, dat online te gebruiken is. Ook kun je met GeoGebra bijvoorbeeld de volgende zaken onderzoeken.

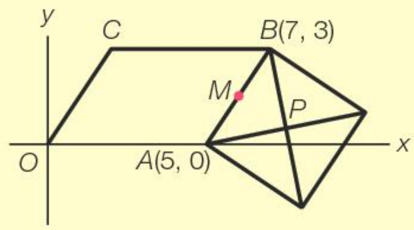
- Welke bijzondere vierhoek ontstaat als je uitgaat van parallellogram $ABCD$?
- Welke bijzondere vierhoek $PQRS$ ontstaat als je op de zijden van vierhoek $ABCD$ afwisselend buiten- en binnenwaarts gerichte gelijkzijdige driehoeken tekent? De punten P, Q, R en S zijn de toppen van deze driehoeken.
- Wat kun je zeggen van de lijnstukken PR en QS als je op de zijden van vierhoek $ABCD$ naar buiten gerichte gelijkvormige rechthoeken tekent? De punten P, Q, R en S zijn de middens van deze rechthoeken.

Terugblik

Rotaties en coördinaten

Draai je de vector $\vec{a} = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$ rechtsom over 90°, dan krijg je de vector $\vec{a}_R = \begin{pmatrix} q \\ -p \end{pmatrix}$.

Bij linksom draaien van $\vec{a}$ over 90° krijg je de vector $\vec{a}_L = \begin{pmatrix} -q \\ p \end{pmatrix}$.



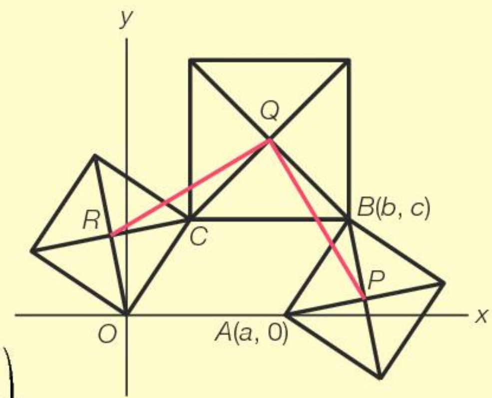
In de figuur hiernaast is het parallellogram $OABC$ met $A(5, 0)$ en $B(7, 3)$ getekend. Op zijde AB is een vierkant geplaatst met midden P.
De coördinaten van P krijg je als volgt.
$\vec{p} = \vec{m} + \overrightarrow{MA}_L$ waarbij het punt M het midden van de zijde AB is.

$$\vec{m} = \tfrac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b}) = \tfrac{1}{2}\left(\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 6 \\ 1\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{MA} = \vec{a} - \vec{m} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 \\ 1\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1\frac{1}{2} \end{pmatrix}, \text{ dus } \overrightarrow{MA}_L = \begin{pmatrix} 1\frac{1}{2} \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Dus $\vec{p} = \begin{pmatrix} 6 \\ 1\frac{1}{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1\frac{1}{2} \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ en $P(7\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

Rotaties en bewijzen



Hiernaast zie je het parallellogram $OABC$ met vierkanten op drie zijden. Om bij deze figuur te bewijzen dat $PQ = QR$ en $PQ \perp QR$ ga je als volgt te werk.
$\vec{p} = \vec{m} + \overrightarrow{MA}_L$ waarbij het punt M het midden van de zijde AB is.

$$\vec{m} = \tfrac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b}) = \tfrac{1}{2}\left(\begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b \\ c \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b \\ \frac{1}{2}c \end{pmatrix} \text{ en}$$

$$\overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a} = \begin{pmatrix} b \\ c \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b - a \\ c \end{pmatrix}, \text{ dus } \overrightarrow{MA}_L = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}c \\ \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b \end{pmatrix}.$$

Dus $\vec{p} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b \\ \frac{1}{2}c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2}c \\ \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} a + b + c \\ a - b + c \end{pmatrix}$.

Op dezelfde manier krijg je $\vec{q} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}a + b \\ \frac{1}{2}a + c \end{pmatrix}$ en $\vec{r} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -a + b - c \\ -a + b + c \end{pmatrix}$.

Dit geeft $\overrightarrow{PQ} = \vec{q} - \vec{p} = \begin{pmatrix} -a + \frac{1}{2}b - \frac{1}{2}c \\ \frac{1}{2}b + \frac{1}{2}c \end{pmatrix}$ en $\overrightarrow{QR} = \vec{r} - \vec{q} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}b - \frac{1}{2}c \\ -a + \frac{1}{2}b - \frac{1}{2}c \end{pmatrix}$.

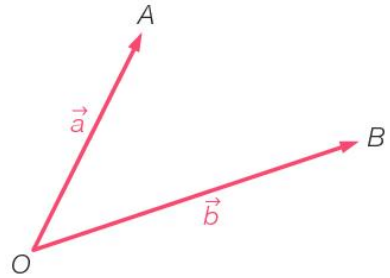
Er geldt $\overrightarrow{QR} = \overrightarrow{PQ}_L$, dus $PQ = QR$ en $PQ \perp QR$.

10.3 Vectoren en lijnen

O27

a Teken de vectoren $\vec{a}$ en $\vec{b}$ zoals hiernaast en teken in deze figuur $\overrightarrow{OC} = \vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$, $\overrightarrow{OD} = \vec{a} + \vec{b}$, $\overrightarrow{OE} = \vec{a} + 2\vec{b}$, $\overrightarrow{OF} = \vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b}$, $\overrightarrow{OG} = \vec{a} - \vec{b}$ en $\overrightarrow{OH} = \vec{a} - 2\vec{b}$.

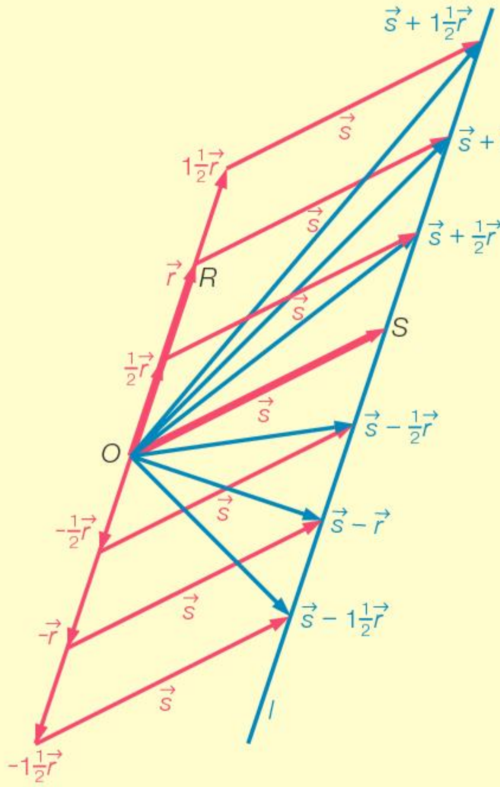
b Wat kun je zeggen van de eindpunten van de in a getekende vectoren?



figuur 10.34

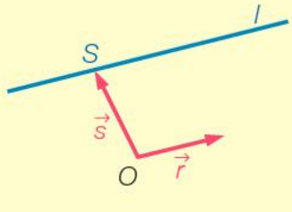
Theorie A De vectorvoorstelling van een lijn

In figuur 10.35 zijn de punten S en R en de vectoren $\overrightarrow{OS} = \vec{s}$ en $\overrightarrow{OR} = \vec{r}$ getekend. Ook zijn de volgende vectoren en hun eindpunten getekend: $\vec{s} - 1\frac{1}{2}\vec{r}$, $\vec{s} - \vec{r}$, $\vec{s} - \frac{1}{2}\vec{r}$, $\vec{s} + \frac{1}{2}\vec{r}$, $\vec{s} + \vec{r}$ en $\vec{s} + 1\frac{1}{2}\vec{r}$.
Al deze eindpunten liggen op de lijn l door S die evenwijdig is met $\vec{r}$. Dat wil zeggen dat elk punt P van l voldoet aan $\overrightarrow{OP} = \vec{s} + t \cdot \vec{r}$. Hierin is t een willekeurig getal. Laat je t alle waarden aannemen, dan krijg je de hele lijn l. We noemen l: $\overrightarrow{OP} = \vec{s} + t \cdot \vec{r}$ een **vectorvoorstelling van de lijn** l. De vector $\vec{s}$ is een **steunvector** van l en de vector $\vec{r}$ is een **richtingsvector** van l.
Een steunvector van een lijn begint in de oorsprong.

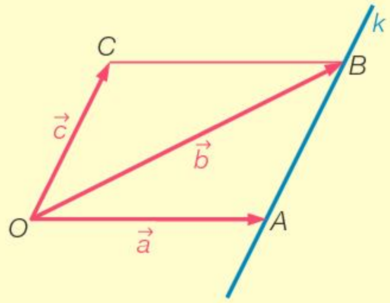


figuur 10.35

Elk punt P waarvoor geldt $\overrightarrow{OP} = \vec{s} + t \cdot \vec{r}$ ligt op de lijn l door het eindpunt van de steunvector $\overrightarrow{OS} = \vec{s}$ en die evenwijdig is met de richtingsvector $\vec{r}$.
l: $\overrightarrow{OP} = \vec{s} + t \cdot \vec{r}$ heet een vectorvoorstelling van l.

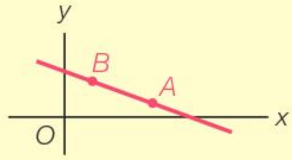


In figuur 10.36 is de lijn k door de punten A en B getekend.
Bovendien is het punt C zo getekend, dat $\vec{a} + \vec{c} = \vec{b}$.
Uit $\vec{a} + \vec{c} = \vec{b}$ volgt $\vec{c} = \vec{b} - \vec{a}$.
Omdat $\vec{c}$ evenwijdig is met k, is $\vec{c}$ een richtingsvector van k en is dus ook $\vec{b} - \vec{a}$ een richtingsvector van k.
Notatie: $\vec{r}_{AB} = \vec{b} - \vec{a}$.



figuur 10.36

Een vectorvoorstelling van de lijn door de punten A en B is $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{a} + t \cdot (\vec{b} - \vec{a})$.



Voorbeeld

De lijn l gaat door de punten $P(3, 4)$ en $Q(5, 6)$.

a Stel een vectorvoorstelling op van l.
b Onderzoek of het punt $A(27, 28)$ op l ligt.

Uitwerking

a
$$\left.\begin{array}{l} l: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{p} + t \cdot (\vec{q} - \vec{p}) \\ \vec{p} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \text{ en } \vec{q} - \vec{p} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \end{array}\right\} l: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

b $x = 27$ geeft $3 + 2t = 27$
$2t = 24$
$t = 12$
$t = 12$ geeft $y = 4 + 12 \cdot 2 = 28$
Dus A ligt op l.

In de uitwerking van voorbeeld a is $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ een richtingsvector van lijn l.

Elke vector $c \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ met $c \neq 0$ is evenwijdig met de vector $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Daarom is $l: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ook een vectorvoorstelling van lijn l. Met de notatie $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \triangleq \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ geven we aan dat de vectoren $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ en $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ evenwijdig zijn.

De vectoren $\begin{pmatrix} -10 \\ 15 \end{pmatrix}$ en $\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ zijn evenwijdig.
Notatie: $\begin{pmatrix} -10 \\ 15 \end{pmatrix} \triangleq \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$.

In de uitwerking van voorbeeld b is gebruikt dat lijn l ook te noteren is als $x = 3 + 2t \wedge y = 4 + 2t$. We noemen $x = 3 + 2t \wedge y = 4 + 2t$ een **parametervoorstelling van de lijn l**.

R28 Zie het voorbeeld.

a Licht toe dat ook $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ een vectorvoorstelling van l is.

b Licht toe dat ook $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ een vectorvoorstelling van l is.

c Voor welke p is $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ p \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ een vectorvoorstelling van l?

29 Stel een vectorvoorstelling op van

a de lijn k door de punten $A(2, 3)$ en $B(-4, 2)$

b de lijn l door de punten $C(1, 0)$ en $D(2, 3)$

c de lijn m door de punten $E(0, 3)$ en $F(-4, 0)$.

30 Gegeven is de lijn k: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$.

Onderzoek van de punten $A(7, -7)$, $B(-13, 15)$ en $C(-3\frac{1}{2}, 7)$ of ze op k liggen.

31 Teken in één figuur de lijnen

k: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$, l: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} + u \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$,

m: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} + v \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ en n: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} + w \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

32 Teken in één figuur de volgende lijnstukken.

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \wedge -1 \leq t \leq 1$

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} + u \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \wedge 1 \leq u \leq 3$

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} + v \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \wedge -1 \leq v \leq 0$

A33 Gegeven zijn de punten $A(-1, 2)$, $B(3, 4)$ en $C(-5, -2)$.
Stel een vectorvoorstelling op van

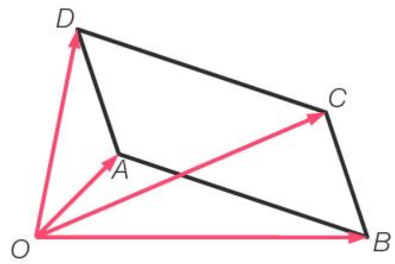
a de lijn k door A, evenwijdig met BC

b de lijn l door B en het midden M van het lijnstuk AC

c de lijn m door het midden N van het lijnstuk AB, evenwijdig met AC

d het lijnstuk BC.

A34 Gegeven zijn de vectoren $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ en $\vec{d}$ die vanuit O de hoekpunten van het parallellogram $ABCD$ aanwijzen.



figuur 10.37

a Licht toe dat $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{2}(\vec{b} + \vec{c}) + t \cdot (\vec{c} - \vec{d})$ een vectorvoorstelling is van de lijn door de middens van de zijden AD en BC.

b Stel een vectorvoorstelling op van de lijn
- k door A, die evenwijdig is met BD
- l door B en het midden van de zijde CD
- m door het snijpunt van de diagonalen, die evenwijdig is met BC.

c Welke lijn heeft als vectorvoorstelling

I: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{b} + t \cdot (\vec{c} - \vec{a})$

II: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b}) + t \cdot (\vec{b} - \vec{d})$

III: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{a} + t \cdot (\frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c} - \vec{a})$?

35 **a** Gegeven zijn de lijnen k: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ en l: $y = 4x - 28$.

Om de coördinaten van het snijpunt S van k en l te vinden, substitueer je $x = 1 - 3t$ en $y = 2 + t$ in $y = 4x - 28$.
Toon aan dat $t = -2$ en bereken de coördinaten van S.

b Bereken de coördinaten van het snijpunt T van de lijnen
m: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -3 \end{pmatrix} + u \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ en n: $2x - 5y = 11$.

36 Bereken de coördinaten van het snijpunt van de lijnen.

a k: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ en l: $2x - 5y = 6$

b m: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix} + u \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ en n: $3x + 4y = 10$

37 **a** Gegeven is de lijn k: $x = 4 + 2t \wedge y = 1 - 5t$.

Door bij het stelsel $\begin{cases} x = 4 + 2t \\ y = 1 - 5t \end{cases}$ de variabele t te elimineren, krijg je een vergelijking van k. Vermenigvuldig daartoe de bovenste vergelijking van het stelsel met 5 en de onderste vergelijking met 2 en tel de vergelijkingen vervolgens bij elkaar op.
Doe dat.

b Stel een vergelijking op van de lijn l: $x = 3 - t \wedge y = 2 + 3t$.

c Stel een vergelijking op van de lijn m: $x = 3t - 1 \wedge y = 5t + 1$.

38 Gegeven is de lijn k: $y = 2x + 3$. Je krijgt een parametervoorstelling van k door x uit te drukken in t en dit te gebruiken om y uit te drukken in t.
Zorg er wel voor dat x een lineaire functie van t is.
Kies je $x = 4t$ dan krijg je $y = 8t + 3$.

a Licht dit toe.
b Stel een parametervoorstelling op van k waarbij $x = t + 5$.
c Stel een parametervoorstelling op van k waarbij $x = -3t + 2$.
d Stel een parametervoorstelling op van k waarbij $y = 4t$.

39 **a** Stel een vergelijking op van de lijn k: $x = 4t + 5 \wedge y = 3 - 2t$.
b Stel een parametervoorstelling op van de lijn l: $3x - 2y = 6$.
c Stel een vectorvoorstelling op van de lijn m: $x = 2 - 9t \wedge y = 2t - 1$.
d Stel een parametervoorstelling op van de lijn n: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$.

A40 **a** De lijn k: $4x - 5y = -9$ heeft parametervoorstelling
$x = 5t + p \wedge y = 4t + 3$.
Bereken p.
b Stel de formule op van de lijn l: $x = 2t - 1 \wedge y = -3t + 5$
in de vorm $y = ax + b$.

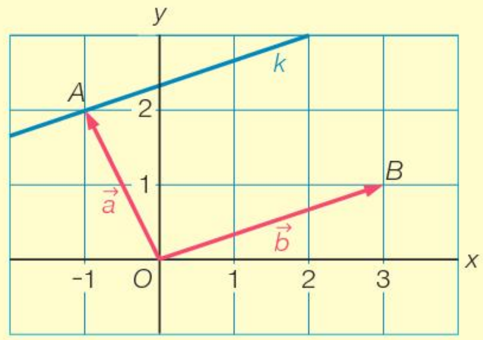
A41 **a** Bereken de coördinaten van het snijpunt S van de lijnen
k: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ en l: $x - 2y = 10$.
b Het punt $A(-3a + 1, 2a)$ ligt op de lijn m: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix} + u \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$.
Bereken de coördinaten van A.
c Bereken voor welke q de lijn n_q: $x = 2v + q \wedge y = -v - 2q$ door het punt $(5, 2)$ gaat.

E42 Gegeven zijn de lijnen $k_{a,b}$: $x = at - 3 \wedge y = bt + 1$ en l_c: $2x + 5y = c$.
Bereken mogelijke waarden van a, b en c in het geval $k_{a,b}$ en l_c
a elkaar snijden in het punt $(3, 4)$
b samenvallen.

E43 De lijn k heeft parametervoorstelling $x = -t - 3 \wedge y = pt - 8$ en vectorvoorstelling $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ q \end{pmatrix} + u \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$.
Bereken p en q.

Terugblik

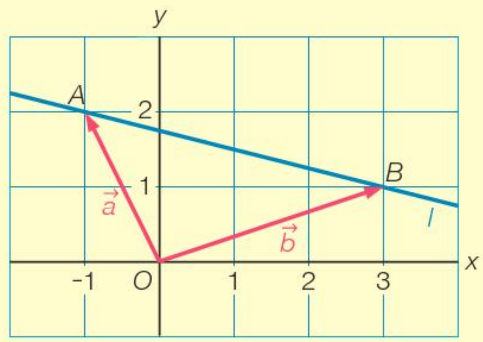
De vectorvoorstelling van een lijn



De lijn k in de figuur hiernaast gaat door het punt $A(-1, 2)$ en is evenwijdig met de lijn door O en $B(3, 1)$.

Een vectorvoorstelling van k is k: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Van k is $\vec{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ een steunvector en $\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ een richtingsvector.
Een steunvector begint in O.



Voor het opstellen van een vectorvoorstelling van de lijn l in de figuur hiernaast gebruik je

l: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{a} + t \cdot (\vec{b} - \vec{a})$.

Omdat $\vec{b} - \vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$ krijg je

l: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Merk op dat bijvoorbeeld ook $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix}$ een vectorvoorstelling van l is.

De vectoren $\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$ en $\begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix}$ zijn evenwijdig. Notatie: $\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix} \triangleq \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Om te controleren of het punt $C(11, -2)$ op l ligt, gebruik je dat l te noteren is met de parametervoorstelling $x = -1 + 4t \wedge y = 2 - t$.
Uit $2 - t = -2$ volgt $t = 4$. Maar $t = 4$ geeft $x = -1 + 16 = 15 \neq 11$, dus C ligt niet op l.

Om een vergelijking van de lijn m met parametervoorstelling $x = 3t + 5 \wedge y = 2t + 1$ op te stellen, elimineer je de variabele t.

$$\begin{cases} x = 3t + 5 \\ y = 2t + 1 \end{cases} \begin{vmatrix} 2 \\ 3 \end{vmatrix} \text{ geeft } \begin{cases} 2x = 6t + 10 \\ 3y = 6t + 3 \end{cases} -$$
$$2x - 3y = 7$$

Dus je krijgt m: $2x - 3y = 7$.
Neem je $x = 3t - 1$ in $2x - 3y = 7$, dan krijg je

$$\begin{aligned} 2(3t - 1) - 3y &= 7 \\ 6t - 2 - 3y &= 7 \\ -3y &= -6t + 9 \\ y &= 2t - 3 \end{aligned}$$

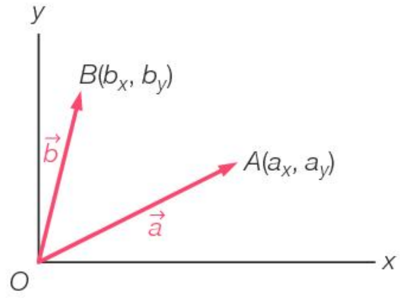
Dus ook $x = 3t - 1 \wedge y = 2t - 3$ is een parametervoorstelling van m.

10.4 Vectoren en hoeken

044 Zie figuur 10.38 met de punten $A(a_x, a_y)$ en $B(b_x, b_y)$.

a Licht toe dat $|\vec{a}|^2 = a_x^{\ 2} + a_y^{\ 2}$ en $|\vec{b}|^2 = b_x^{\ 2} + b_y^{\ 2}$.

b Licht toe dat $AB^2 = (b_x - a_x)^2 + (b_y - a_y)^2$ en herleid dit tot $AB^2 = a_x^{\ 2} + a_y^{\ 2} + b_x^{\ 2} + b_y^{\ 2} - 2a_xb_x - 2a_yb_y$.

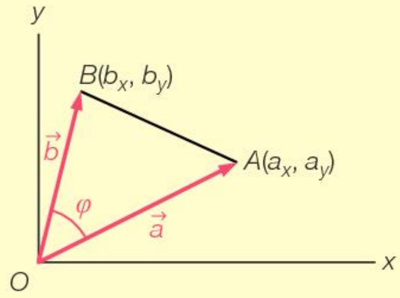


figuur 10.38

Theorie A De hoek tussen twee vectoren

Om de hoek φ tussen de vectoren $\vec{a}$ en $\vec{b}$ in figuur 10.39 te berekenen, gebruik je de cosinusregel in driehoek OAB.
Dit geeft $AB^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2 \cdot |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\varphi)$, dus

$$\cos(\varphi) = \frac{|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - AB^2}{2 \cdot |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}.$$



figuur 10.39

Met wat je in opgave 44 hebt gevonden geeft dit

$$\cos(\varphi) = \frac{a_x^{\ 2} + a_y^{\ 2} + b_x^{\ 2} + b_y^{\ 2} - a_x^{\ 2} - a_y^{\ 2} - b_x^{\ 2} - b_y^{\ 2} + 2a_xb_x + 2a_yb_y}{2 \cdot |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$

$$= \frac{2a_xb_x + 2a_yb_y}{2 \cdot |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{a_xb_x + a_yb_y}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}.$$

De uitdrukking die in de teller staat heet het **inwendig product**, kortweg het **inproduct**, van de vectoren $\vec{a}$ en $\vec{b}$ en wordt genoteerd als $\vec{a} \cdot \vec{b}$.

Het inproduct van de vectoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix}$ en $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \end{pmatrix}$ is
$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_xb_x + a_yb_y$.

Met behulp van het inproduct kan $\cos(\varphi) = \dfrac{a_xb_x + a_yb_y}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$ worden

genoteerd als $\cos(\varphi) = \dfrac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$. Voorwaarde is dat $\vec{a} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \vec{b} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

In het vervolg van dit hoofdstuk vermelden we deze voorwaarde niet meer.

De vector $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ heet de **nulvector** en wordt genoteerd als $\vec{0}$.

Voor de hoek tussen de vectoren $\vec{a}$ en $\vec{b}$ geldt $\cos(\angle(\vec{a}, \vec{b})) = \dfrac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$.

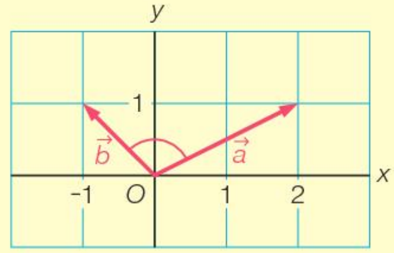
De berekening van de hoek tussen $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ en $\vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ in figuur 10.40 gaat als volgt.

1 $\vec{a} \cdot \vec{b} = 2 \cdot -1 + 1 \cdot 1 = -1$

2 $|\vec{a}| = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$ en $|\vec{b}| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}$

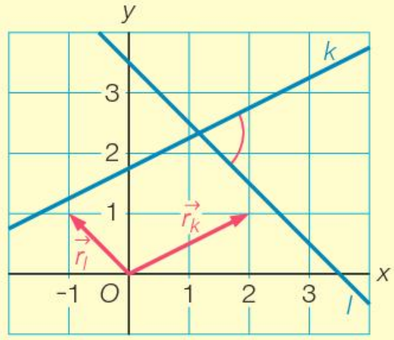
3 $\cos(\angle(\vec{a}, \vec{b})) = \dfrac{-1}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{2}} = \dfrac{-1}{\sqrt{10}}$

4 $\angle(\vec{a}, \vec{b}) \approx 108{,}4°$



figuur 10.40

Je kunt vectoren gebruiken om de hoek tussen twee snijdende lijnen te berekenen. Voor de berekening van de hoek tussen de lijnen k en l met richtingsvectoren $\vec{r}_k$ en $\vec{r}_l$ bereken je de hoek tussen $\vec{r}_k$ en $\vec{r}_l$.
Omdat de hoek tussen $\vec{r}_k$ en $\vec{r}_l$ stomp kan zijn en de hoek tussen k en l niet, is echter niet altijd
$\cos(\angle(k, l)) = \cos(\angle(\vec{r}_k, \vec{r}_l))$.
Omdat $\cos(180° - \alpha) = -\cos(\alpha)$, geldt altijd
$\cos(\angle(k, l)) = |\cos(\angle(\vec{r}_k, \vec{r}_l))|$.



figuur 10.41

Voor de hoek tussen twee snijdende lijnen k en l geldt

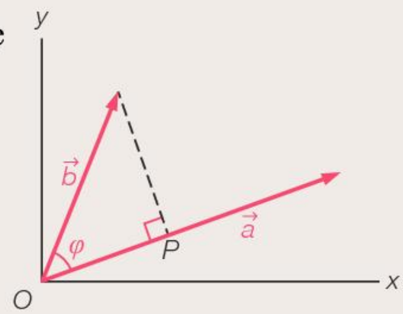
$$\cos(\angle(k, l)) = |\cos(\angle(\vec{r}_k, \vec{r}_l))| = \frac{|\vec{r}_k \cdot \vec{r}_l|}{|\vec{r}_k| \cdot |\vec{r}_l|}.$$

Afspraak
Rond bij het berekenen van een hoek in graden af op één decimaal, tenzij anders gevraagd.

INFORMATIEF

De meetkundige betekenis van het inproduct

Uit $\cos(\varphi) = \dfrac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$ volgt $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\varphi)$. In de figuur hiernaast is $\cos(\varphi) = \dfrac{OP}{|\vec{b}|}$, dus $OP = |\vec{b}| \cdot \cos(\varphi)$.
Hieruit volgt $|\vec{a}| \cdot OP = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\varphi)$ en dit is juist het inproduct van $\vec{a}$ en $\vec{b}$. Dus $\vec{a} \cdot \vec{b}$ is de lengte van $\vec{a}$ keer de lengte van de projectie van $\vec{b}$ op $\vec{a}$. Voor scherpe hoeken φ geldt dat het inproduct de lengte is van de ene vector keer de lengte van de projectie van de andere vector op de eerste vector.



Voorbeeld

Gegeven zijn de lijnen m: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ en n: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + u \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$.
Bereken $\angle(m, n)$.

Uitwerking

$$\cos(\angle(m, n)) = \frac{\left| \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} \right|}{\left| \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right| \cdot \left| \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} \right|} = \frac{|2 \cdot -3 + 3 \cdot 1|}{\sqrt{13} \cdot \sqrt{10}} = \frac{3}{\sqrt{130}}$$

Dus $\angle(m, n) \approx 74{,}7°$.

R45

a Zie de theorie op de vorige bladzijde.
Bereken de hoek tussen de lijnen k en l in figuur 10.41.

b Zie het voorbeeld.
Bereken $\angle(\vec{r}_m, \vec{r}_n)$.

46 Bereken het inproduct van de vectoren.

a $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ en $\vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ -6 \end{pmatrix}$

b $\vec{c} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ en $\vec{d} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$

c $\vec{e} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ en $\vec{f} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

d $\vec{g} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}$ en $\vec{h} = \begin{pmatrix} 2\sqrt{2} \\ -\sqrt{3} \end{pmatrix}$

47 Bereken de hoek tussen de vectoren.

a $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ en $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

b $\vec{c} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$ en $\vec{d} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$

c $\vec{e} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ en $\vec{f} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$

d $\vec{g} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix}$ en $\vec{h} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$

48 Bereken de hoek tussen de lijnen.

a k: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ en l: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + u \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

b m: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ en n: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix} + u \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

c p: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ en q: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + u \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

A49 Bereken de hoek tussen de lijnen.

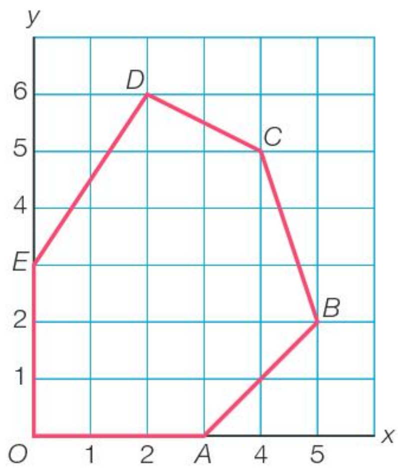
a $k: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ en $l: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + u \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$

b $m: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ en $n: x = 3u - 2 \wedge y = 10u + 3$

A50 Gegeven is de zeshoek $OABCDE$ in figuur 10.42.

a Bereken $\angle B$.

b Bereken de hoek tussen de diagonalen AD en BE.



figuur 10.42

A51 Gegeven zijn de punten $A(1, 3)$, $B(4, 2)$ en $C(3, -2)$.

a Bereken de hoek tussen de lijnen AC en BC.

b Bereken $\angle ABC$.

E52 Gegeven zijn de lijnen $k_{a,b}: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$

en $l: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} + u \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$.

a Bereken de hoek tussen $k_{a,b}$ en l in het geval de lijnen elkaar snijden in het punt $S(3, -1)$.

b Bereken a in het geval $b = 1$ en de lijnen elkaar snijden onder een hoek van 80°. Rond af op twee decimalen.

O53 Gegeven zijn de vectoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$ en $\vec{b} = \begin{pmatrix} q \\ -p \end{pmatrix}$.

Bereken $\vec{a} \cdot \vec{b}$ en licht toe hoe hieruit volgt dat $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 90°$.

O54 In figuur 10.43 is de lijn k: $2x + 3y = 6$ getekend.

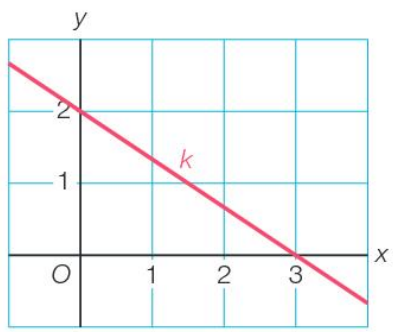
Een richtingsvector van k is $\vec{r}_k = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$.

a Licht dit toe.

De vector $\vec{n}_k = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ staat loodrecht op de lijn k.

b Licht dit toe.

c Noem een vector die loodrecht staat op de lijn l: $5x - 4y = 3$.



figuur 10.43

Theorie B Een normaalvector van een lijn

Uit $\cos(\angle(\vec{a}, \vec{b})) = \dfrac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$ volgt

$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ geeft $\cos(\angle(\vec{a}, \vec{b})) = 0$, dus $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 90°$.
Dat betekent dat $\vec{a}$ loodrecht staat op $\vec{b}$, notatie $\vec{a} \perp \vec{b}$.
Dus $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ geeft $\vec{a} \perp \vec{b}$.
Ook geldt het omgekeerde: $\vec{a} \perp \vec{b}$ geeft $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$.

$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ komt op hetzelfde neer als $\vec{a} \perp \vec{b}$.

Omdat $\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} q \\ -p \end{pmatrix} = 0$ en $\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -q \\ p \end{pmatrix} = 0$ geldt

$\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} q \\ -p \end{pmatrix}$ en $\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} -q \\ p \end{pmatrix}$.

In opgave 54 heb je gezien dat de vector $\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ loodrecht staat op de lijn k: $2x + 3y = 6$. In het algemeen geldt dat de vector $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ loodrecht staat op de lijn l: $ax + by = c$. Zie het bewijs in het informatief op de volgende bladzijde.

Een vector die loodrecht staat op een lijn heet een **normaalvector van de lijn**. Een normaalvector noteren we met $\vec{n}$.
Dus $\vec{n}_l = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ is een normaalvector van de lijn l: $ax + by = c$.

Een normaalvector van een lijn l is een vector die loodrecht op l staat.
De vector $\vec{n}_l = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ is een normaalvector van de lijn l: $ax + by = c$.

Voor het omzetten van vectorvoorstellingen naar vergelijkingen en omgekeerd kun je gebruikmaken van normaalvectoren.

Voorbeeld

Gegeven zijn de lijnen k: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$ en l: $3x - 7y = 8$.

a Stel een vergelijking op van k in de vorm $ax + by = c$.
b Stel een vectorvoorstelling op van l.

Uitwerking

a $\vec{r}_k = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$, dus $\vec{n}_k = \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \end{pmatrix}$.

$\left.\begin{array}{l} k\text{: } 5x - 4y = c \\ (2, 3) \text{ op } k \end{array}\right\} c = 5 \cdot 2 - 4 \cdot 3 = -2$

Dus k: $5x - 4y = -2$.

b $\vec{n}_l = \begin{pmatrix} 3 \\ -7 \end{pmatrix}$, dus $\vec{r}_l = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix}$.

$(5, 1)$ op l, dus $\vec{s}_l = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Dus l: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} + u \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix}$.

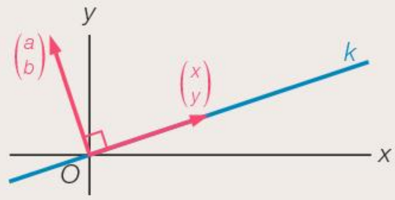
Je kunt voor de steunvector elk punt van l gebruiken. Neem bij voorkeur een punt met gehele coördinaten.

55 **a** Stel van de lijnen k: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ en l: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = u \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -7 \end{pmatrix}$ een vergelijking op in de vorm $ax + by = c$.
b Stel van de lijnen m: $x - 2y = -3$ en n: $4x + y = 0$ een vectorvoorstelling op.

INFORMATIEF

Een normaalvector van een lijn

In de figuur hiernaast is k een lijn door de oorsprong, is $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ een richtingsvector van k en is $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \perp k$.



Uit $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \perp k$ volgt $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0$ oftewel $ax + by = 0$.

Dus een vergelijking van k is $ax + by = 0$.

Elke lijn l: $ax + by = c$ is evenwijdig met k, dus $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ staat loodrecht op l: $ax + by = c$.

56

a Stel een vergelijking op van de lijn l die evenwijdig is met de lijn k: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix}$ en die door het punt $A(4, 1)$ gaat.

b Stel een vergelijking op van de lijn n die loodrecht staat op de lijn m: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} + u \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ en die door het punt $B(5, -1)$ gaat.

57

a Stel een vectorvoorstelling op van de lijn l die evenwijdig is met de lijn k: $2x - 3y = 10$ en die door het punt $A(5, 2)$ gaat.

b Stel een vectorvoorstelling op van de lijn n die loodrecht staat op de lijn m: $4x + 5y = 6$ en die door het punt $B(1, -3)$ gaat.

A58

a Bereken de coördinaten van het snijpunt S van de lijnen k: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ en l: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix} + u \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$.

b De lijn m gaat door de punten $A(-3, 5)$ en $B(3, -1)$. De lijn n gaat door het punt $C(-4, -2)$ en staat loodrecht op de lijn p: $-x + 5y = 4$. Bereken de coördinaten van het snijpunt T van m en n.

c Bereken de coördinaten van het snijpunt U van de lijnen q: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$ en r: $x = 2w - 4 \wedge y = w - 6$.

A59

a De lijn k: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$ snijdt de x-as in het punt A.
Stel een vergelijking op van de lijn l door A die loodrecht op k staat.

b Gegeven zijn de punten $B(2, 5)$ en $C(-1, 4)$.
Stel een vectorvoorstelling op van de lijn n door de oorsprong die evenwijdig is met de lijn m door B en C.

c Stel een vergelijking op van de lijn p door het punt $D(-4, 7)$ die loodrecht staat op de lijn q door de punten O en $E(1, -4)$.

A60

Bereken de hoek tussen de lijnen.

a k: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix}$ en l: $2x - 5y = 6$

b m: $3x - 7y = 8$ en n: $x + 2y = 3$

c p: $y = 2x - 5$ en q: $y = -x + 4$

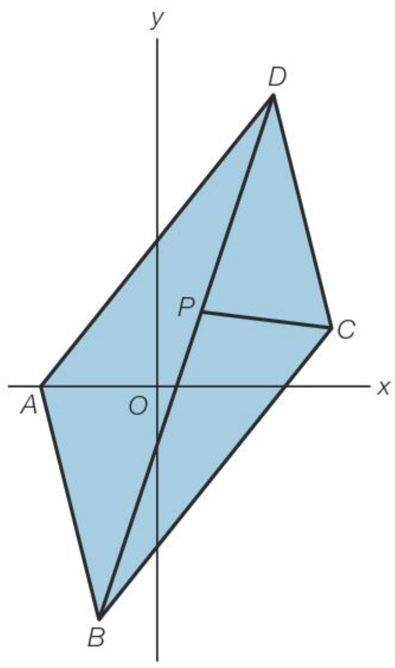
E61

a De lijn k_p: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2p \\ p+5 \end{pmatrix}$ is evenwijdig met de lijn l_p die door de punten $B(-1, -2)$ en $C(p, 4)$ gaat.
Stel een vergelijking van l_p op.

b De lijn m_p: $(p + 3)x + (p - 1)y = -12$ snijdt de lijn $n_{p,q}$: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ p-4 \end{pmatrix} + u \cdot \begin{pmatrix} q \\ 3-q \end{pmatrix}$ loodrecht in het punt $D(-2, p - 4)$.
Bereken exact p en q.

62 Gegeven is het parallellogram $ABCD$ met hoekpunten $A(-2, 0)$, $B(-1, -4)$, $C(3, 1)$ en $D(2, 5)$.
Een vectorvoorstelling van de lijn door B en D is
$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$.
Het punt P ligt op de diagonaal BD.
Er geldt $\overrightarrow{CP} = \begin{pmatrix} t-1 \\ 3t+4 \end{pmatrix}$.

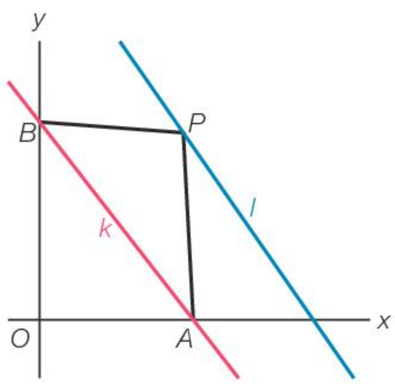
a Licht dit toe.
b Bereken de coördinaten van P in het geval $CP \perp BD$.
c Bereken de coördinaten van P in het geval $CP = OP$.



figuur 10.44

A63 De lijn k: $4x + 3y = 12$ snijdt de x-as in het punt A en de y-as in het punt B. Van de lijn l is $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ een vectorvoorstelling. Het punt P ligt op l. Zie de figuur hiernaast.

a Bereken exact de coördinaten van P in het geval $AP \perp BP$.
b Bereken exact de coördinaten van P in het geval $AP = BP$.



figuur 10.45

Terugblik

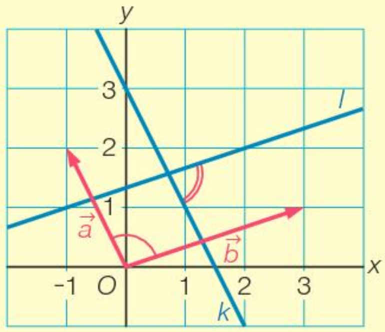
De hoek tussen twee vectoren

De hoek tussen de vectoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix}$ en $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \end{pmatrix}$ bereken je met

$\cos(\angle(\vec{a}, \vec{b})) = \dfrac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$. Hierin is $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y$ het inproduct van de vectoren $\vec{a}$ en $\vec{b}$.

Bij $\vec{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ en $\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ krijg je $\cos(\angle(\vec{a}, \vec{b})) = \dfrac{-1 \cdot 3 + 2 \cdot 1}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{10}} = \dfrac{-1}{\sqrt{50}}$ en dit geeft $\angle(\vec{a}, \vec{b}) \approx 98{,}1°$.

In de figuur hiernaast is de lijn k met $\vec{r}_k = \vec{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ en de lijn l met $\vec{r}_l = \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ getekend. Voor de hoek tussen k en l krijg je $\cos(\angle(k, l)) = \dfrac{|-1|}{\sqrt{50}}$ en dit geeft $\angle(k, l) \approx 81{,}9°$.



Een normaalvector van een lijn

Is $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ dan is $\vec{a} \perp \vec{b}$ en omgekeerd, als $\vec{a} \perp \vec{b}$ dan is $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$.
Een normaalvector van een lijn is een vector die loodrecht op de lijn staat.

Een normaalvector van de lijn l: $ax + by = c$ is $\vec{n}_l = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$.

Met behulp van normaalvectoren kun je een vectorvoorstelling van een lijn omzetten in een vergelijking, en omgekeerd. Je gebruikt daarbij dat $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} b \\ -a \end{pmatrix}$.

Bij het opstellen van een vergelijking van de lijn k: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 7 \end{pmatrix}$ gebruik je dat $\vec{r}_k = \begin{pmatrix} -4 \\ 7 \end{pmatrix}$ en dus $\vec{n}_k = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \end{pmatrix}$ en dat het punt $(5, 3)$ op k ligt.
Je krijgt k: $7x + 4y = 47$.
Bij het opstellen van een vectorvoorstelling van de lijn l: $4x - 3y = 10$ gebruik je dat $\vec{n}_l = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$ en dus $\vec{r}_l = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ en dat het punt $(1, -2)$ op l ligt.

Je krijgt l: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$.

10.5 Vectoren bij snelheid en versnelling

064 De baan van een punt P is gegeven door $\begin{cases} x(t) = t^2 - 4t \\ y(t) = 2t - 6 \end{cases}$

Hierin is t de tijd.
Op $t = 0$ is P in het punt $(0, -6)$.

a Licht dit toe.

b Vul de tabel in en teken de baan van P.

t	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6
x			0						
y			-6						

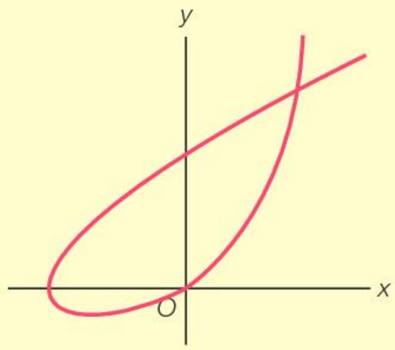
c Bereken de vector die de verplaatsing geeft van P op het interval $[2, 3]$.

Theorie A Snelheid bij bewegingen

De baan van een punt P wordt gegeven door de **bewegingsvergelijkingen** $\begin{cases} x(t) = \frac{1}{3}t^3 - 4t \\ y(t) = t^2 - 2t \end{cases}$

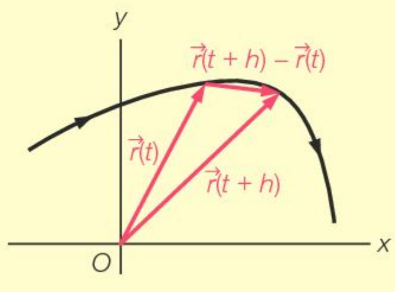
Hierin is t de tijd.
In de figuur hiernaast zie je de baan van P.
De bewegingsvergelijkingen vormen de **parametervoorstelling van de baan** van P. De baan wordt daarom ook wel een **parameterkromme** genoemd.
In het algemeen hebben bewegingsvergelijkingen de vorm $\begin{cases} x(t) = f(t) \\ y(t) = g(t) \end{cases}$

Bewegingsvergelijkingen worden ook wel met vectoren genoteerd.
De vector $\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ heet de **plaatsvector** van P en wordt genoteerd als $\vec{r}(t)$. De plaatsvector is dus de vector die vanuit O het punt P aanwijst.



figuur 10.46

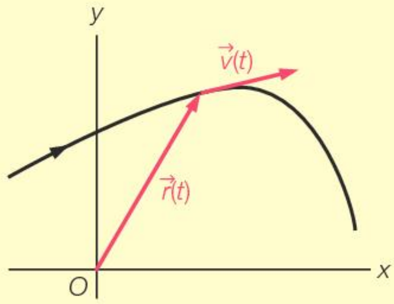
Op het interval $[t, t + h]$ is het punt P verplaatst over de vector $\vec{r}(t + h) - \vec{r}(t)$. Zie figuur 10.47.
Om de vector te vinden die de snelheid van P op het tijdstip t geeft, berekenen we $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\vec{r}(t+h) - \vec{r}(t)}{h}$.



figuur 10.47

$$\lim_{h\to 0}\frac{\vec{r}(t+h)-\vec{r}(t)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\begin{pmatrix}x(t+h)\\y(t+h)\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}x(t)\\y(t)\end{pmatrix}}{h}=$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\begin{pmatrix}x(t+h)-x(t)\\y(t+h)-y(t)\end{pmatrix}=\lim_{h\to 0}\begin{pmatrix}\frac{x(t+h)-x(t)}{h}\\\frac{y(t+h)-y(t)}{h}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x'(t)\\y'(t)\end{pmatrix}$$

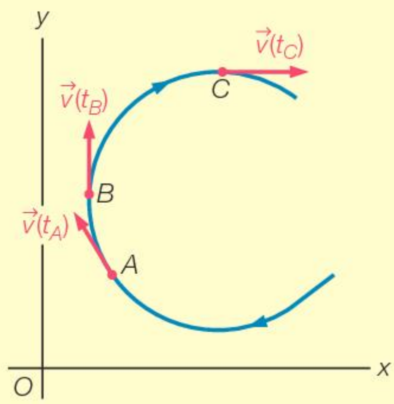


figuur 10.48

De vector $\vec{v}(t)=\begin{pmatrix}x'(t)\\y'(t)\end{pmatrix}$ heet de **snelheidsvector** van P en is een richtingsvector van de raaklijn aan de baan op het tijdstip t. De lengte van de snelheidsvector is de **baansnelheid** van P op het tijdstip t.

Bij de plaatsvector $\vec{r}(t)=\begin{pmatrix}x(t)\\y(t)\end{pmatrix}$ van een punt P hoort de snelheidsvector $\vec{v}(t)=\begin{pmatrix}x'(t)\\y'(t)\end{pmatrix}$.
De baansnelheid van P is $v(t)=|\vec{v}(t)|=\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}$.

In de figuur hiernaast beweegt een punt P over de kromme door de punten A, B en C.
In het punt B is de raaklijn verticaal, dus is
$\vec{v}(t_B)=\begin{pmatrix}0\\y'(t_B)\end{pmatrix}$. Dat wil zeggen $x'(t_B)=0 \wedge y'(t_B)\neq 0$.
In het punt C is de raaklijn horizontaal, dus is
$\vec{v}(t_C)=\begin{pmatrix}x'(t_C)\\0\end{pmatrix}$.

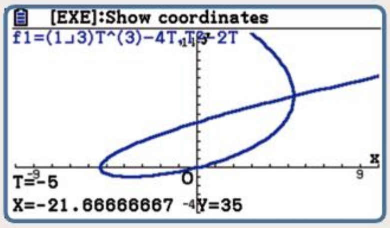


figuur 10.49

INFORMATIEF

Banen plotten met de GR

Op de GR kun je een parametervoorstelling invoeren en de baan plotten. Je krijgt dan de parameterkromme. Om zo'n kromme te plotten geef je behalve het venster ook op tussen welke waarden t zich bevindt. Bij de kromme die gegeven is door $x(t)=\frac{1}{3}t^3-4t \wedge y(t)=t^2-2t$ neem je bijvoorbeeld t tussen −5 en 5, x tussen −10 en 10 en y tussen −5 en 15. De variabele t voer je in met dezelfde toets als waarmee je de variabele x invoert.



Om met parametervoorstellingen te werken op de TI kies je in het mode-menu in plaats van FUNCTIE voor PARAMETRISCH. Op de Casio kies je in het Graph-menu bij TYPE voor Param. Op de HP kies je de app Parametrisch.

Voorbeeld

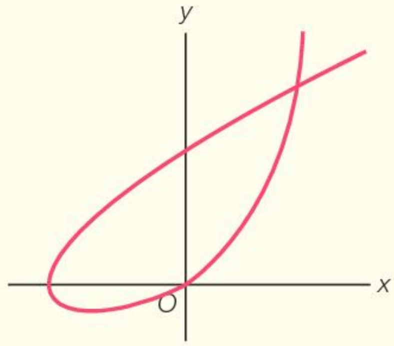
De beweging van een punt P wordt beschreven door de bewegingsvergelijkingen $\begin{cases} x(t) = \frac{1}{3}t^3 - 4t \\ y(t) = t^2 - 2t \end{cases}$

a Bereken de coördinaten van het punt van de baan waarin de raaklijn evenwijdig met de x-as is.

b Stel een vergelijking op van de lijn k die de baan raakt in het punt met $t = 3$.

c Bereken de minimale baansnelheid en de bijbehorende t. Rond af op drie decimalen.

d De baan snijdt zichzelf voor $t = -2$ en voor $t = 4$ in het punt $(5\frac{1}{3}, 8)$.
Bereken de hoek φ waaronder dit gebeurt. Geef je antwoord in graden en rond af op één decimaal.



figuur 10.50

De hoek waaronder de baan zichzelf snijdt is de hoek tussen de raaklijnen van de kromme in dat punt.

Uitwerking

a $x(t) = \frac{1}{3}t^3 - 4t$ geeft $x'(t) = t^2 - 4$
$y(t) = t^2 - 2t$ geeft $y'(t) = 2t - 2$
Evenwijdig met de x-as, dus
$$\begin{aligned} y'(t) = 0 &\wedge x'(t) \neq 0 \\ 2t - 2 = 0 &\wedge t^2 - 4 \neq 0 \\ 2t = 2 &\wedge t^2 \neq 4 \\ t = 1 &\wedge t \neq 2 \wedge t \neq -2 \end{aligned}$$
Dus $t = 1$ en dit geeft het punt $(-3\frac{2}{3}, -1)$.

b Stel k: $ax + by = c$.
$\vec{r}_k = \begin{pmatrix} x'(3) \\ y'(3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 - 4 \\ 6 - 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}$, dus $\vec{n}_k = \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \end{pmatrix}$.
$\left.\begin{array}{l} k\text{: } 4x - 5y = c \\ t = 3 \text{ geeft het punt } (-3, 3) \end{array}\right\} c = 4 \cdot -3 - 5 \cdot 3 = -27$
Dus k: $4x - 5y = -27$.

c $v(t) = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} = \sqrt{(t^2 - 4)^2 + (2t - 2)^2}$
Voer in $y_1 = \sqrt{(x^2 - 4)^2 + (2x - 2)^2}$.
De optie minimum geeft $x = 1{,}7692...$ en $y = 1{,}7673...$
De minimale baansnelheid is ongeveer 1,767 voor $t \approx 1{,}769$.

d $\vec{v}(-2) = \begin{pmatrix} x'(-2) \\ y'(-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 - 4 \\ -4 - 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \end{pmatrix} \triangleq \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$
$\vec{v}(4) = \begin{pmatrix} x'(4) \\ y'(4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 - 4 \\ 8 - 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 6 \end{pmatrix} \triangleq \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$
$$\cos(\varphi) = \frac{\left|\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right|} = \frac{|0 + 1|}{1 \cdot \sqrt{2^2 + (1)^2}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$
Dus $\varphi \approx 63{,}4°$.

65
Zie het voorbeeld met de bewegingsvergelijkingen $\begin{cases} x(t) = \frac{1}{3}t^3 - 4t \\ y(t) = t^2 - 2t \end{cases}$

a Er zijn twee punten op de baan waarin de raaklijn evenwijdig is met de y-as.
Bereken de coördinaten van deze punten.

b De baan gaat door de oorsprong.
Stel een vergelijking op van de lijn l die de baan raakt in de oorsprong.

Om te berekenen voor welke t het punt P zowel naar links als omhoog beweegt, los je de gecombineerde ongelijkheid $t^2 - 4 < 0 \wedge 2t - 2 > 0$ op.

c Licht dit toe.

d Los de gecombineerde ongelijkheid op.

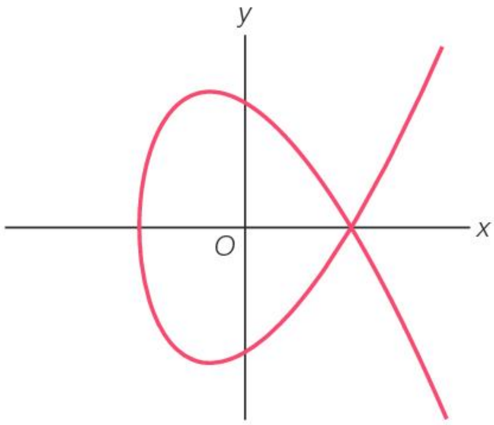
66
De beweging van een punt P wordt beschreven door de bewegingsvergelijkingen $\begin{cases} x(t) = t^2 - 2 \\ y(t) = t^3 - 4t \end{cases}$

a Bereken de coördinaten van de punten van de baan waarin de raaklijn evenwijdig met de x-as is.

b Bereken exact de snelheid van P op $t = -1$.

c Bereken exact voor welke t het punt P zowel naar rechts als omlaag beweegt.

d Toon aan dat de baan zichzelf snijdt in het punt (2, 0) en bereken de hoek φ waaronder dit gebeurt. Geef je antwoord in graden in één decimaal.



figuur 10.51

67
De beweging van een punt P wordt beschreven door de bewegingsvergelijkingen $\begin{cases} x(t) = 2t - \frac{1}{6}t^3 \\ y(t) = \frac{1}{4}t^2 - 2t \end{cases}$

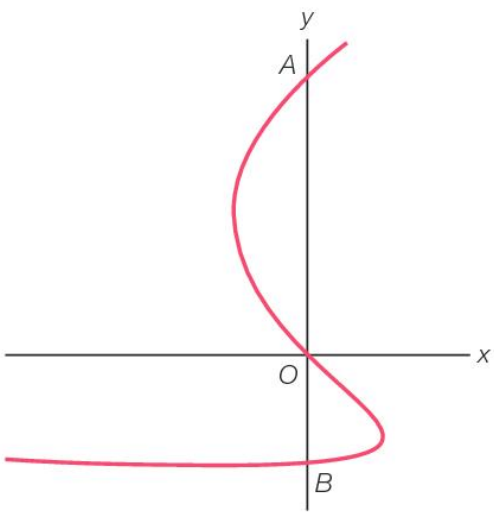
De baan van P snijdt de y-as behalve in O ook in de punten A en B. Zie figuur 10.52.

a Bereken exact de afstand tussen A en B.

b Bereken de coördinaten van de punten waarin de raaklijn evenwijdig is met de x-as of met de y-as.

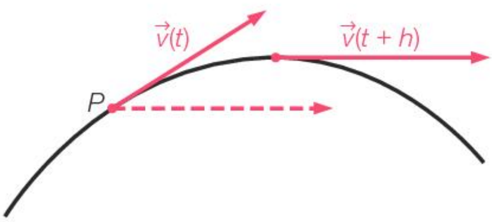
c Bereken de baansnelheid in de oorsprong.

d Bereken in twee decimalen de minimale baansnelheid.



figuur 10.52

O68
In de figuur hiernaast zie je de baan van een bewegend punt P en de snelheidsvectoren op de tijdstippen t en $t + h$.
Neem de figuur over en teken de verschilvector $\vec{v}(t + h) - \vec{v}(t)$. Verplaats hiertoe $\vec{v}(t + h)$ naar P.



figuur 10.53

Theorie B Versnelling bij bewegingen

In opgave 68 heb je te maken met een beweging waarvan de snelheidsvector $\vec{v}(t)$ verandert. De **versnellingsvector** $\vec{a}(t)$ is de afgeleide van de snelheidsvector, dus

$$\vec{a}(t) = \vec{v}'(t) = \lim_{h \to 0} \frac{\vec{v}(t+h) - \vec{v}(t)}{h} = \left[\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix}\right]' = \begin{pmatrix} x''(t) \\ y''(t) \end{pmatrix}.$$

De **baanversnelling** $a(t)$ is de afgeleide van de snelheid $v(t)$.
Dus $a(t) = v'(t)$.

Bij de plaatsvector $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ van een punt P hoort de versnellingsvector $\vec{a}(t) = \begin{pmatrix} x''(t) \\ y''(t) \end{pmatrix}$ en de baanversnelling $a(t) = v'(t)$.

In het informatief op de volgende bladzijde wordt bewezen dat voor de baanversnelling ook geldt $a(t) = \dfrac{\vec{v}(t) \cdot \vec{a}(t)}{v(t)}$.

Voorbeeld

De bewegingsvergelijkingen van een punt P zijn gegeven door

$$\begin{cases} x(t) = t^2 - 1 \\ y(t) = \frac{1}{4}t^4 - 2t \end{cases}$$

Bereken exact de baanversnelling op $t = 1$.

Uitwerking

$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} t^2 - 1 \\ \frac{1}{4}t^4 - 2t \end{pmatrix}$ geeft $\vec{v}(t) = \begin{pmatrix} 2t \\ t^3 - 2 \end{pmatrix}$ en

$v(t) = \sqrt{(2t)^2 + (t^3 - 2)^2} = \sqrt{4t^2 + t^6 - 4t^3 + 4} = \sqrt{t^6 - 4t^3 + 4t^2 + 4}$ en

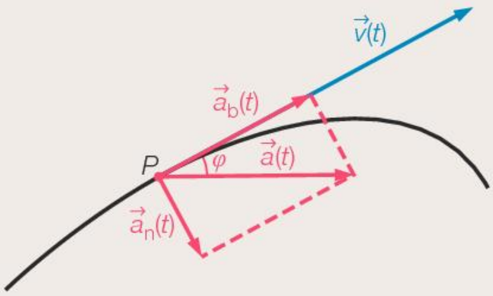
$$a(t) = v'(t) = \frac{1}{2\sqrt{t^6 - 4t^3 + 4t^2 + 4}} \cdot (6t^5 - 12t^2 + 8t) = \frac{3t^5 - 6t^2 + 4t}{\sqrt{t^6 - 4t^3 + 4t^2 + 4}}.$$

$$a(1) = \frac{3 - 6 + 4}{\sqrt{1 - 4 + 4 + 4}} = \frac{1}{\sqrt{5}} = \tfrac{1}{5}\sqrt{5}$$

R69 Zie het voorbeeld.
Druk met behulp van de formule $a(t) = \dfrac{\vec{v}(t) \cdot \vec{a}(t)}{v(t)}$ van het informatief op de volgende bladzijde de baanversnelling uit in t.

INFORMATIEF

Een andere formule voor de baanversnelling



In de figuur hiernaast is zowel de snelheidsvector als de versnellingsvector op het tijdstip t getekend. De versnellingsvector $\vec{a}(t)$ is ontbonden in de onderling loodrechte componenten $\vec{a}_n(t)$ en $\vec{a}_b(t)$. De lengte van de vector $\vec{a}_n(t)$ heeft invloed op de kromming van de baan. De lengte van de vector $\vec{a}_b(t)$ geeft de grootte van de baanversnelling van het punt P.
In het geval $\vec{a}_b(t)$ en $\vec{v}(t)$ dezelfde richting hebben is de baanversnelling positief.
In het geval $\vec{a}_b(t)$ en $\vec{v}(t)$ tegengestelde richting hebben is de baanversnelling negatief.

In de figuur geldt $\cos(\varphi) = \dfrac{|\vec{a}_b(t)|}{|\vec{a}(t)|}$. Samen met $\cos(\varphi) = \dfrac{\vec{v}(t) \cdot \vec{a}(t)}{|\vec{v}(t)| \cdot |\vec{a}(t)|}$ geeft dit

$$\frac{|\vec{a}_b(t)|}{|\vec{a}(t)|} = \frac{\vec{v}(t) \cdot \vec{a}(t)}{|\vec{v}(t)| \cdot |\vec{a}(t)|} \text{ dus } |\vec{a}_b(t)| = \frac{\vec{v}(t) \cdot \vec{a}(t)}{|\vec{v}(t)|} \text{ oftewel } a_b(t) = \frac{\vec{v}(t) \cdot \vec{a}(t)}{v(t)}.$$

De baanversnelling is dus ook te berekenen met de formule $a(t) = \dfrac{\vec{v}(t) \cdot \vec{a}(t)}{v(t)}$.

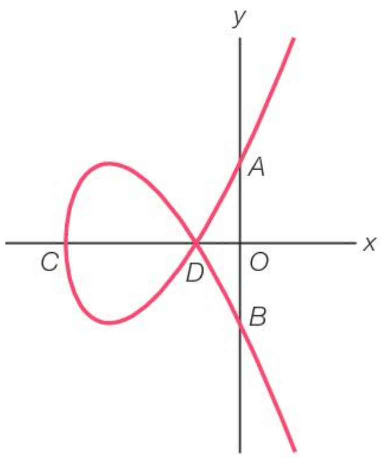
Deze formule geldt ook voor $\varphi > 90°$.

70

De bewegingsvergelijkingen van een punt P zijn gegeven door $\begin{cases} x(t) = t^2 - 4 \\ y(t) = t^3 - 3t \end{cases}$

De baan snijdt de y-as in de punten A en B en de x-as in de punten C en D. Zie figuur 10.54.

a Onderzoek in welke volgorde A, B, C en D worden doorlopen.
b Druk de baanversnelling uit in t.
c Bereken exact de baansnelheid en de baanversnelling in A.
d Bereken exact de baansnelheid in de punten waarin de baanversnelling nul is.
e Bereken in drie decimalen de minimale baansnelheid.
f Bereken exact de tijdstippen waarop de baansnelheid gelijk is aan 2.
g De baan snijdt zichzelf in het punt $D(-1, 0)$.
Toon dit aan en bereken de hoek φ waaronder dit gebeurt.



figuur 10.54

A71

De baan van een punt P is gegeven door de bewegingsvergelijkingen $\begin{cases} x(t) = \frac{1}{2}t^2 - 2 \\ y(t) = \frac{1}{2}t^2 - 2t \end{cases}$

De baan snijdt de x-as in de punten A en B en de y-as in de punten C en D. Zie figuur 10.55.

a Onderzoek in welke volgorde A, B, C en D worden doorlopen.

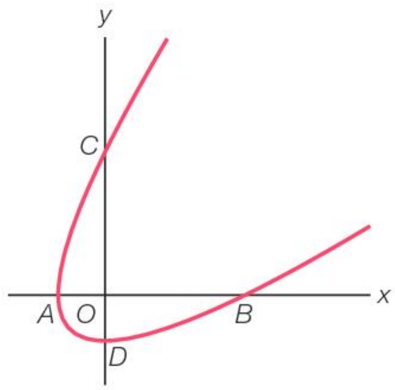
b Druk de baanversnelling uit in t.

c Bereken in welk punt van de baan de versnellingsvector loodrecht staat op de snelheidsvector.

d Bereken exact de minimale baansnelheid.

e Toon aan dat P de x-as in het punt B met dezelfde baansnelheid passeert als de y-as in het punt C.

f De lijn k raakt de baan in het punt $E(-1\frac{1}{2}, 2\frac{1}{2})$. Stel een vergelijking op van k.



figuur 10.55

E72

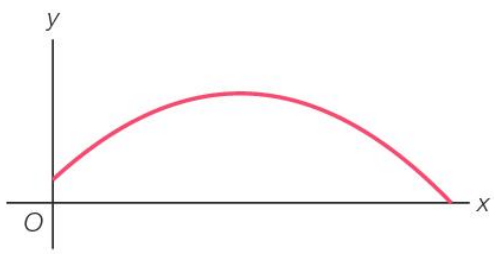
Zie opgave 71.
De lijn $x = p$ snijdt de baan van P in de punten Q en R waarbij de lengte van het lijnstuk QR gelijk is aan 4 en R boven Q ligt.
Bereken exact de coördinaten van Q en R.

73

Bij het onderdeel speerwerpen in de atletiek wordt na een aanloop een speer zover mogelijk weggeworpen.
In deze opgave bekijken we het volgende model van de baan van de punt van een speer.

$\begin{cases} x(t) = 25t \\ y(t) = -5t^2 + 15t + 3 \end{cases}$

Hierbij zijn $x(t)$ en $y(t)$ in meter en is t de tijd in seconden.



figuur 10.56

$x(t)$ en $y(t)$ geven de plaats van de punt van de speer t seconden nadat de speer de hand van de werper heeft verlaten.

a Bereken in m/s de baansnelheid waarmee de speer wordt weggeworpen. Rond af op één decimaal.

b Bereken in graden nauwkeurig de hoek φ van de baan waaronder de speer wordt weggeworpen.

c Wat is de maximale hoogte die de speer bereikt?

d Hoe ver van de afworplijn komt de speer neer? Neem aan dat de punt van de speer twee meter voor de afworplijn is op het moment dat de speer wordt losgelaten. Geef het antwoord in dm nauwkeurig.

e Bereken de versnellingsvector. Wat stelt deze versnellingsvector voor?

A74

De bewegingsvergelijkingen van een punt P zijn gegeven door $\begin{cases} x(t) = \frac{1}{3}t^3 - 4t \\ y(t) = t^2 - 4 \end{cases}$

De baan snijdt zichzelf in het punt S op de y-as, de x-as in de punten A en B en de lijn $y = 5$ in de punten C en D. Zie figuur 10.57.

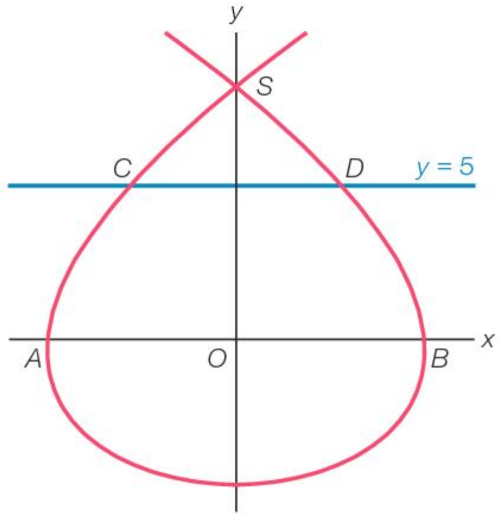
a Toon aan dat de raaklijn aan de baan verticaal is in A en B.

b Bereken exact de baansnelheid en de baanversnelling in C.

c Bereken exact de coördinaten van de punten waarin de baansnelheid gelijk is aan $6\frac{1}{2}$.

d De baanversnelling heeft voor $t > 0$ een minimum.
Bereken dit minimum in drie decimalen.

e Bereken in graden nauwkeurig de hoek φ waaronder de baan zichzelf snijdt.

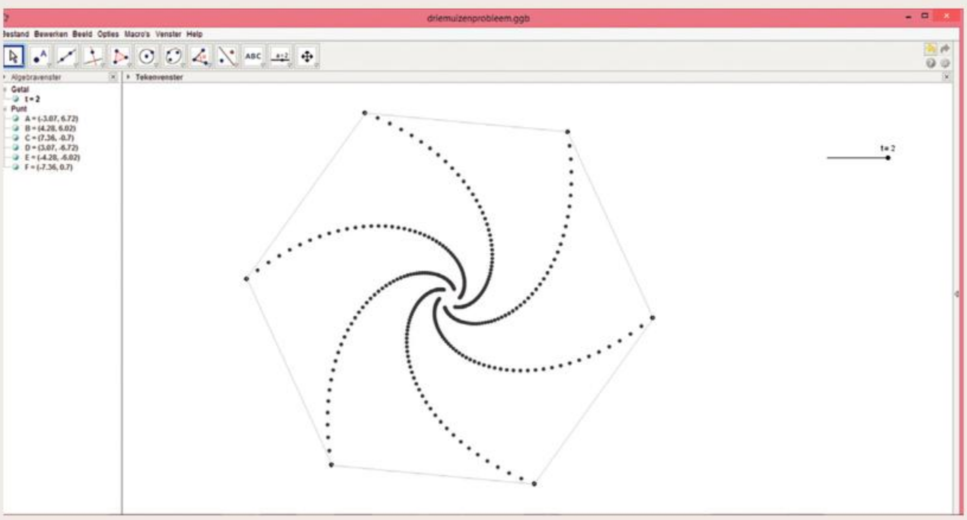


figuur 10.57

INFORMATIEF

Het muizenprobleem

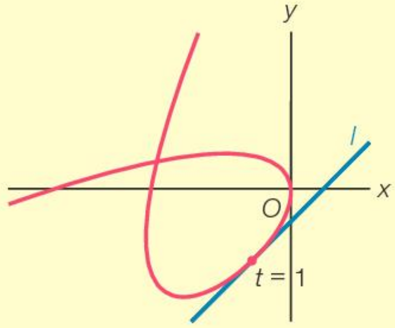
Het muizenprobleem is een probleem waarin drie of meer muizen vanuit de hoekpunten van een regelmatige veelhoek vertrekken. De muizen lopen met gelijke snelheid in de richting van hun naaste buur. Welke baan wordt daarbij gevolgd en hoe groot is de afgelegde afstand tot ze bij elkaar komen?
Dit probleem werd voor het eerst geformuleerd door Édouard Lucas in 1877. In 1880 bewees Henri Brocard dat de banen logaritmische spiralen zijn.
Sinds het probleem in 1950 in het blad Historical Snapshots verscheen, zijn verschillende varianten bestudeerd.
In de GeoGebra-figuur zie je een variant in beeld gebracht waarbij de muizen vanuit de hoekpunten van een regelmatige zeshoek steeds per tijdseenheid 5% van de afstand tot hun naaste buur afleggen.



Terugblik

Plaatsvector en snelheidsvector

De bewegingsvergelijkingen $\begin{cases} x(t) = \frac{1}{3}t^3 - 1\frac{1}{2}t^2 \\ y(t) = \frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{2}t^2 - 2t \end{cases}$
met t de tijd geven de baan van een punt P.
In de figuur hiernaast is de baan getekend. De baan is een parameterkromme.



De snelheidsvector $\vec{v}(t)$ is de afgeleide van de plaatsvector $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}t^3 - 1\frac{1}{2}t^2 \\ \frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{2}t^2 - 2t \end{pmatrix}$, dus $\vec{v}(t) = \begin{pmatrix} t^2 - 3t \\ t^2 - t - 2 \end{pmatrix}$.

De baansnelheid is de lengte van de snelheidsvector, dus
$v(t) = |\vec{v}(t)| = \sqrt{(t^2 - 3t)^2 + (t^2 - t - 2)^2} = \sqrt{2t^4 - 8t^3 + 6t^2 + 4t + 4}$.

Om een vergelijking van de raaklijn l op te stellen in het punt waarvoor $t = 1$ bereken je $x(1)$, $y(1)$ en $\vec{v}(1)$. Je krijgt $x(1) = -1\frac{1}{6}$,
$y(1) = -2\frac{1}{6}$ en $\vec{v}(1) = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Uit $\vec{v}(1) = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix}$ volgt $\vec{n}_l = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.
Dus l: $x - y = c$.
Invullen van $(-1\frac{1}{6}, -2\frac{1}{6})$ geeft $c = 1$, dus l: $x - y = 1$.

De baansnelheid die bij $t = 1$ hoort is
$v(1) = \sqrt{2 - 8 + 6 + 4 + 4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$.

Om de punten van de baan te vinden met een horizontale raaklijn los je op $y'(t) = 0 \wedge x'(t) \neq 0$.
Je krijgt $t^2 - t - 2 = 0 \wedge t^2 - 3t \neq 0$
$(t + 1)(t - 2) = 0 \wedge t(t - 3) \neq 0$
$(t = -1 \vee t = 2) \wedge t \neq 0 \wedge t \neq 3$
Dus $t = -1$ en $t = 2$ en dit geeft de punten $(-1\frac{5}{6}, 1\frac{1}{6})$ en $(-3\frac{1}{3}, -3\frac{1}{3})$.

Versnellingsvector en baanversnelling

De versnellingsvector $\vec{a}(t)$ is de afgeleide van de snelheidsvector, dus bij de bewegingsvergelijkingen hierboven hoort $\vec{a}(t) = \begin{pmatrix} 2t - 3 \\ 2t - 1 \end{pmatrix}$.

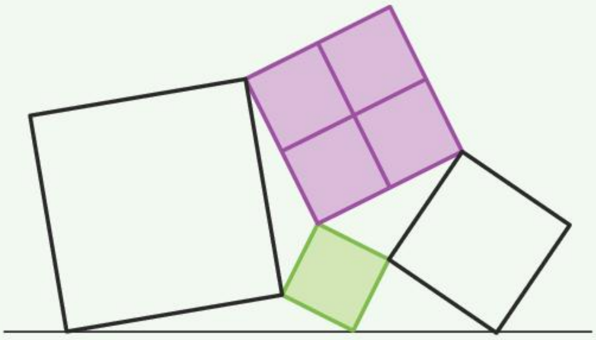
De baanversnelling krijg je door de afgeleide van v te berekenen.
$v(t) = \sqrt{2t^4 - 8t^3 + 6t^2 + 4t + 4}$ geeft $a(t) = v'(t) = \dfrac{4t^3 - 12t^2 + 6t + 2}{\sqrt{2t^4 - 8t^3 + 6t^2 + 4t + 4}}$

De baanversnelling voor $t = 3$ is
$a(3) = \dfrac{4 \cdot 27 - 12 \cdot 9 + 6 \cdot 3 + 2}{\sqrt{2 \cdot 81 - 8 \cdot 27 + 6 \cdot 9 + 4 \cdot 3 + 4}} = 5$.

Eindopdracht Een sangaku met vier vierkanten

In de beginopdracht heb je een stelling bewezen die was uitgebeeld in een sangaku met vijf vierkanten en een driehoek. Bij dat bewijs gebruikte je veelvuldig gelijkvormige driehoeken.

In deze eindopdracht ga je een stelling bewijzen die wordt uitgebeeld in een sangaku met vier vierkanten. Zie de figuur hiernaast. De sangaku werd in 1826 door Ikeda Sadakazu opgehangen in een tempel in Tokio en is lange tijd onopgelost gebleven.

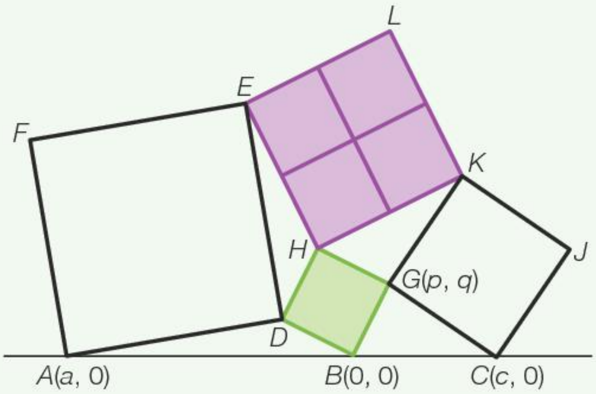


- Wat wordt er met de sangaku uitgebeeld?

Je gaat het bewijs geven met behulp van vectoren. Gebruik daarbij de figuur hiernaast met $A(a, 0)$, $B(0, 0)$, $C(c, 0)$ en $G(p, q)$.

Je kunt de vector $\vec{e}$ op twee manieren uitdrukken in a, c, p en/of q.

- Doe dat, toon vervolgens aan dat $G(\frac{1}{4}c, -\frac{1}{4}a)$ en maak het bewijs af.

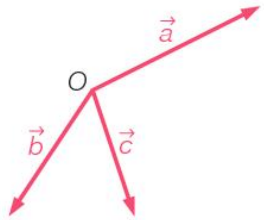


Diagnostische toets

10.1 Vectoren

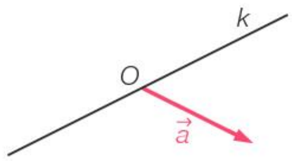
1 Gegeven zijn de vectoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ en $\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$.
Bereken de kentallen en de lengte van de volgende vectoren.
a $\vec{c} = \vec{a} + 2\vec{b}$ **b** $\vec{d} = 2\vec{a} - 3\vec{b}$ **c** $\vec{e} = \vec{b} - \frac{1}{2}\vec{a}$

2 [▸ WERKBLAD] Gegeven zijn de vectoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ en $\vec{c}$ in figuur 10.58.
Teken de volgende vectoren.
a $2\vec{a} - \vec{b}$ **b** $\vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$ **c** $\vec{a} - (\vec{b} - \vec{c})$



figuur 10.58

3 [▸ WERKBLAD] Gegeven zijn de vector $\vec{a}$ en de lijn k. Zie figuur 10.59. Verder is gegeven dat $\vec{b}$ op k ligt en $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$.
Teken mogelijke vectoren $\vec{b}$ en $\vec{c}$ in het geval
a $\vec{b}$ twee keer zo lang is als $\vec{a}$
b $\vec{c}$ twee keer zo lang is als $\vec{a}$.



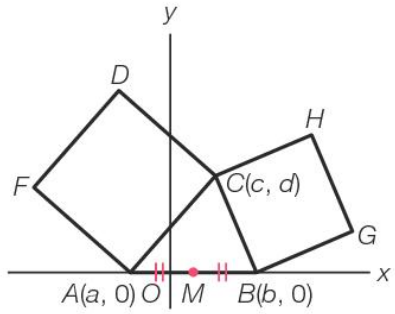
figuur 10.59

4 De vector $\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}$ wordt ontbonden in twee componenten die liggen op de lijnen k: $y = x$ en l: $y = -x$.
Bereken exact de lengte van deze componenten.

10.2 Vectoren en rotaties

5 Gegeven zijn de punten $A(4, 0)$ en $B(8, 6)$. Van de rechthoek $ABCD$ liggen de punten C en D boven de x-as en is zijde AB twee keer zo lang als zijde BC.
Bereken de coördinaten van C en D.

6 Gegeven is driehoek ABC met $A(a, 0)$, $B(b, 0)$ en $C(c, d)$.
Hierbij is $b > a$, $c > 0$ en $d > 0$. Op de zijden AC en BC van driehoek ABC worden de naar buiten gerichte vierkanten $ACDF$ en $BGHC$ geplaatst. Het punt M is het midden van lijnstuk AB. Zie figuur 10.60.
Bewijs dat de lijnen CM en DH elkaar loodrecht snijden en dat $DH = 2 \cdot CM$.



figuur 10.60

10.3 Vectoren en lijnen

7 Gegeven zijn de punten $A(6, 8)$, $B(-4, 5)$ en $C(1, -4)$.
Stel een vectorvoorstelling op van
a de lijn k door B, evenwijdig met AC
b de lijn l door A en het midden M van het lijnstuk BC
c het lijnstuk AC.

8 Bereken de coördinaten van het snijpunt S van de lijnen
k: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ en l: $2x - 3y = 22$.

9 **a** Stel een parametervoorstelling op van de lijn k: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$.
b Stel een vectorvoorstelling op van de lijn l: $3x - y = 6$.
c Stel een vergelijking op van de lijn m: $x = 4 - 2t \wedge y = 6 + 3t$.

10 **a** Het punt $A(2p, 3 - p)$ ligt op de lijn k: $x = 2 + t \wedge y = 3 - 2t$.
Bereken de coördinaten van A.
b Het punt $B(6, 1)$ ligt op de lijn l: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ q \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.
Bereken q.

10.4 Vectoren en hoeken

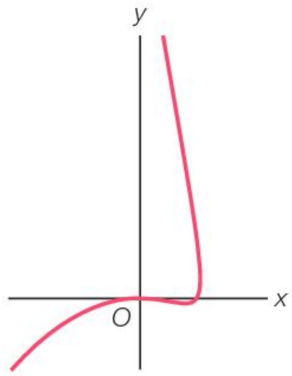
11 Gegeven zijn de punten $A(-2, 3)$, $B(4, 4)$ en $C(-3, -1)$.
a Bereken de hoek tussen de lijnen AB en BC.
b Bereken $\angle BAC$.

12 **a** Stel een vergelijking op van de lijn k door het punt $(3, 4)$ die evenwijdig is met de lijn l: $x = 1 - 5t \wedge y = 4 + 3t$.
b Stel een vectorvoorstelling op van de lijn m door het punt $(1, 1)$ die loodrecht staat op de lijn n: $5x - y = -2$.
c Stel een vergelijking op van de lijn p door het punt $(-2, 3)$ die loodrecht staat op de lijn r: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$.

13 Bereken de hoek tussen de lijnen k: $y = \frac{1}{3}x + 3$ en l: $x = 2 + t \wedge y = 1 - 3t$.

10.5 Vectoren bij snelheid en versnelling

14 De bewegingsvergelijkingen van een punt P zijn gegeven door $\begin{cases} x(t) = 4t - t^2 \\ y(t) = \frac{2}{3}t^3 - t^2 \end{cases}$
a Voor welke t beweegt het punt P zowel naar rechts als omhoog?
b Bereken de coördinaten van de punten waarin de raaklijn evenwijdig is met de x-as of met de y-as.
c Bereken de hoek φ waaronder de baan de positieve x-as snijdt.
d Bereken exact de baansnelheid van P in het snijpunt met de positieve x-as.
e Bereken in twee decimalen de minimale snelheid van P.
Voor welke t wordt deze bereikt?
f In welk punt is de versnelling evenwijdig met de x-as?
g Bereken exact de baanversnelling voor $t = 3$.



figuur 10.61

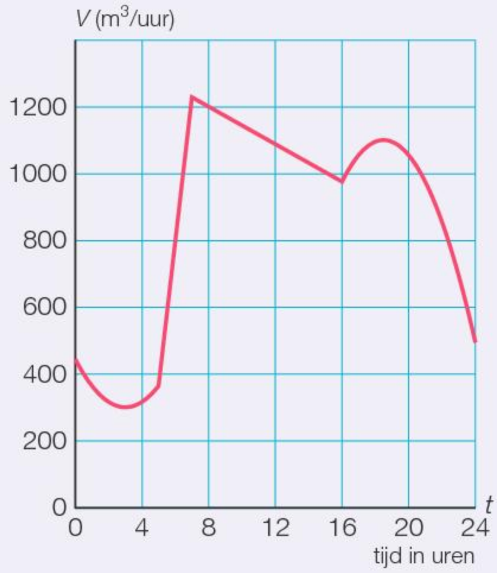
11 Integraalrekening

Wat leer je?

- Wat primitieve functies zijn en wat primitiveren is.
- Hoe je primitieve functies gebruikt om oppervlakten en inhouden te berekenen.
- Hoe je integralen numeriek berekent.
- Integraalrekening gebruiken bij het opstellen van formules bij de inhouden van bol en kegel.
- Integralen gebruiken bij berekeningen met snelheid en versnelling.

Beginopdracht Drinkwater in stedelijk gebied

De figuur hiernaast gaat over het drinkwater dat het bedrijf Vitens op een dag in een stedelijk gebied met 111 005 inwoners gedurende die dag aan zijn klanten heeft geleverd.
Je ziet dat de volumestroom V (in m^3/uur) tussen 5 en 7 uur vrijwel lineair toeneemt. Om 5 uur is $V = 364$ en om 7 uur is $V = 1228$. Om te weten te komen hoeveel drinkwater er tussen 5 en 7 uur is geleverd, bereken je de oppervlakte onder dit gedeelte van de grafiek. Deze berekening is $\frac{1}{2}(364 + 1228) \cdot 2 = 1592$ m^3.
- Licht deze berekening toe.



Als je aanneemt dat de volumestroom ook tussen 7 en 16 uur lineair verloopt, en je ook nog gebruikt dat $V = 975$ om 16 uur, dan kun je hiermee berekenen hoeveel drinkwater tussen 7 en 16 uur is geleverd.
- Bereken deze hoeveelheid.

Het verloop van de volumestroom tussen 0 en 5 uur kun je benaderen door een tweedegraadsformule. Deze formule is $V(t) = 16t^2 - 96t + 444$. Hierin is t de tijd in uren met $t = 0$ om 0 uur. Bij deze formule hoort een oppervlakteformule waarmee je de oppervlakte tussen de parabool en de t-as, en dus de hoeveelheid geleverd drinkwater tussen 0 en 5 uur, kunt berekenen. Voor deze oppervlakteformule $A(t)$ geldt dat $A'(t) = V(t)$. Deze oppervlakteformule is $A(t) = \frac{16}{3}t^3 - 48t^2 + 444t$.
- Ga na dat inderdaad geldt dat $A'(t) = V(t)$.

Om met de formule van $A(t)$ de hoeveelheid geleverd drinkwater tussen $t = 0$ en $t = 5$ te krijgen, bereken je $A(5) - A(0)$.
- Bereken deze hoeveelheid.

Ook de volumestroom tussen 16 en 24 uur is te benaderen door een tweedegraadsformule. Deze formule is $V(t) = -20t^2 + 740t - 5745$. Hierin is t de tijd in uren met $t = 0$ om 0 uur.
- Stel bij deze formule de oppervlakteformule $A(t)$ op en bereken hiermee de hoeveelheid geleverd drinkwater tussen $t = 16$ en $t = 24$.
- Hoeveel liter drinkwater per persoon heeft Vitens deze dag in dit gebied afgeleverd?

Voorkennis Differentiaalrekening

Theorie A Regels voor het differentiëren

Je kent de volgende regels voor het differentiëren.

$f(x) = a$ geeft $f'(x) = 0$

$f(x) = ax^n$ geeft $f'(x) = a \cdot nx^{n-1}$

$f(x) = c \cdot g(x)$ geeft $f'(x) = c \cdot g'(x)$

$f(x) = \mathrm{e}^x$ geeft $f'(x) = \mathrm{e}^x$

$f(x) = g^x$ geeft $f'(x) = g^x \cdot \ln(g)$

$f(x) = \ln(x)$ geeft $f'(x) = \dfrac{1}{x}$

$f(x) = {}^g\log(x)$ geeft $f'(x) = \dfrac{1}{x\ln(g)}$

$f(x) = \sin(x)$ geeft $f'(x) = \cos(x)$

$f(x) = \cos(x)$ geeft $f'(x) = -\sin(x)$

$f(x) = \tan(x)$ geeft $f'(x) = \dfrac{1}{\cos^2(x)}$ en $f'(x) = 1 + \tan^2(x)$

$s(x) = f(x) + g(x)$ geeft $s'(x) = f'(x) + g'(x)$ (somregel)

$v(x) = f(x) - g(x)$ geeft $v'(x) = f'(x) - g'(x)$ (verschilregel)

$p(x) = f(x) \cdot g(x)$ geeft $p'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$ (productregel)

$q(x) = \dfrac{t(x)}{n(x)}$ geeft $q'(x) = \dfrac{n(x) \cdot t'(x) - t(x) \cdot n'(x)}{(n(x))^2}$ (quotiëntregel)

$f(x) = u(v(x))$ geeft $f'(x) = u'(v(x)) \cdot v'(x)$ (kettingregel)

Voorbeeld

Bereken de afgeleide en herleid zo ver mogelijk.

a $f(x) = \frac{1}{4}\cos(2x) + \frac{1}{2}x\sin(2x)$

b $f(x) = 5x\sqrt{x^2+4}$

Uitwerking

a $f(x) = \frac{1}{4}\cos(2x) + \frac{1}{2}x\sin(2x)$ geeft

$$f'(x) = \tfrac{1}{4} \cdot -\sin(2x) \cdot 2 + \tfrac{1}{2} \cdot \sin(2x) + \tfrac{1}{2}x \cdot \cos(2x) \cdot 2$$
$$= -\tfrac{1}{2}\sin(2x) + \tfrac{1}{2}\sin(2x) + x\cos(2x) = x\cos(2x)$$

b $f(x) = 5x\sqrt{x^2+4}$ geeft

$$f'(x) = 5 \cdot \sqrt{x^2+4} + 5x \cdot \frac{1}{2\sqrt{x^2+4}} \cdot 2x = 5\sqrt{x^2+4} + \frac{5x^2}{\sqrt{x^2+4}}$$
$$= \frac{5(x^2+4)+5x^2}{\sqrt{x^2+4}} = \frac{10x^2+20}{\sqrt{x^2+4}}$$

Voorbeeld

Toon aan dat

a $f'(x) = \dfrac{1}{1 + e^x}$ de afgeleide is van $f(x) = x - \ln(1 + e^x)$

b $f'(x) = \dfrac{x}{(2x + 5)^2}$ de afgeleide is van $f(x) = \dfrac{5}{4(2x + 5)} + \frac{1}{4}\ln(2x + 5)$.

Uitwerking

a $f(x) = x - \ln(1 + e^x)$ geeft

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{1 + e^x} \cdot e^x = 1 - \frac{e^x}{1 + e^x} = \frac{1 + e^x - e^x}{1 + e^x} = \frac{1}{1 + e^x}$$

b $f(x) = \dfrac{5}{4(2x + 5)} + \frac{1}{4}\ln(2x + 5) = \frac{5}{4}(2x + 5)^{-1} + \frac{1}{4}\ln(2x + 5)$ geeft

$$f'(x) = -\tfrac{5}{4}(2x + 5)^{-2} \cdot 2 + \tfrac{1}{4} \cdot \frac{1}{2x + 5} \cdot 2 = \frac{-5}{2(2x + 5)^2} + \frac{1}{2(2x + 5)}$$

$$= \frac{-5}{2(2x + 5)^2} + \frac{2x + 5}{2(2x + 5)^2} = \frac{2x}{2(2x + 5)^2} = \frac{x}{(2x + 5)^2}$$

1 Bereken de afgeleide en herleid zo ver mogelijk.

a $f(x) = 4\ln^2(x) - 3\ln(x)$

b $f(x) = \dfrac{10 \cdot 3^x}{\ln(3)}$

c $f(x) = x^2 \cdot \sqrt{2x - 1}$

d $f(x) = \dfrac{e^{2x} + 3}{4\,e^x}$

2 Bereken de afgeleide en herleid zo ver mogelijk.

a $f(x) = x\ln(x) - x$

b $f(x) = x\sqrt{4x - 3}$

c $f(x) = \dfrac{e^{4x} - 5}{2\,e^{3x}}$

d $f(x) = x^2\ln^2(x) - x^2\ln(x)$

e $f(x) = 6x^2\sqrt{x^2 + 1}$

f $f(x) = \dfrac{5 \cdot 2^x}{\ln(2)} - \dfrac{e^{2x} - 1}{e^x}$

3 Toon aan dat

a $f'(x) = \dfrac{1}{(1 + e^x)^2}$ de afgeleide is van $f(x) = x + \dfrac{1}{1 + e^x} - \ln(1 + e^x)$

b $f'(x) = \cos^3(x)$ de afgeleide is van $f(x) = \sin(x) - \frac{1}{3}\sin^3(x)$

c $f'(x) = \dfrac{x^2}{(x + 2)^2}$ de afgeleide is van $f(x) = x + 2 - \dfrac{4}{x + 2} - 4\ln(x + 2)$

d $f'(x) = \dfrac{x^2}{\sqrt{2x + 3}}$ de afgeleide is van $f(x) = (0{,}2x^2 - 0{,}4x + 1{,}2)\sqrt{2x + 3}$.

11.1 Primitieven en integralen

01 Gegeven is de functie $f(x) = 3x^2$.
In deze opgave zoeken we de functie g waarvoor geldt $g'(x) = f(x)$ en $g(2) = 15$.
Omdat $g'(x) = f(x)$ is het functievoorschrift van g van de vorm $g(x) = x^3 + c$.
Licht dit toe en bereken c.

Theorie A Primitieve functies

In opgave 1 heb je de functie g opgespoord waarvoor geldt dat $g'(x) = 3x^2$ en $g(2) = 15$.
Een functie waarvoor geldt dat $g'(x) = f(x)$ heet een **primitieve functie** van f.
Een primitieve functie van f wordt genoteerd met de hoofdletter F.
In opgave 1 heb je gevonden $f(x) = 3x^2$ geeft $F(x) = x^3 + 7$.
Maar ook $F(x) = x^3 + 10$ is een primitieve van $f(x) = 3x^2$, immers $F(x) = x^3 + 10$ geeft $F'(x) = 3x^2 = f(x)$.
Iedere functie F waarvoor geldt $F' = f$ is een primitieve functie van f, ook wel kortweg een **primitieve** van f genoemd.

De functie F is een primitieve van de functie f als $F' = f$.

In het algemeen is $F(x) = 5x^3 + c$ met c een constante een primitieve van $f(x) = 15x^2$.
We zeggen dat $F(x) = 5x^3 + c$ de primitieven zijn van $f(x) = 15x^2$. Hierin is c de **integratieconstante**.

Voorbeeld

Toon aan dat $F(x) = x\ln^2(x) - 2x\ln(x) + 2x + 4$ een primitieve is van $f(x) = \ln^2(x)$.

Aanpak
Bereken $F'(x)$ en laat zien dat $F'(x) = f(x)$.

Uitwerking

$$F'(x) = 1 \cdot \ln^2(x) + x \cdot 2\ln(x) \cdot \frac{1}{x} - 2\ln(x) - 2x \cdot \frac{1}{x} + 2$$
$$= \ln^2(x) + 2\ln(x) - 2\ln(x) - 2 + 2 = \ln^2(x)$$

Dus $F'(x) = f(x)$ oftewel F is een primitieve van f.

2 Toon aan.

a $F(x) = \frac{1}{9}(3x + 4)^3$ is een primitieve van $f(x) = (3x + 4)^2$.

b $F(x) = x - \ln(x + 2)$ is een primitieve van $f(x) = \dfrac{x + 1}{x + 2}$.

c $F(x) = \dfrac{-1}{2(x^2 + 1)}$ is een primitieve van $f(x) = \dfrac{x}{(x^2 + 1)^2}$.

3 Toon aan.

a $F(x) = (x^2 + 1)^6 + 1$ is een primitieve van $f(x) = 12x(x^2 + 1)^5$.

b $G(x) = (\frac{1}{2}x - \frac{1}{4})\,e^{2x} - 2$ is een primitieve van $g(x) = x\,e^{2x}$.

c $H(x) = \ln^2(x) + 2\ln(x) + 3$ is een primitieve van $h(x) = \dfrac{2 + 2\ln(x)}{x}$.

d $J(x) = \dfrac{e^{3x} - 10}{2\,e^x} - 4$ is een primitieve van $j(x) = \dfrac{e^{3x} + 5}{e^x}$.

e $K(x) = \sin^3(x)$ is een primitieve van $k(x) = 3\cos(x) - 3\cos^3(x)$.

4 Toon aan dat $F(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$ een primitieve is van $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$.

O5

a Van welke functie is $F(x) = \frac{1}{5}x^5$ een primitieve?

b Van welke functie is $G(x) = \frac{1}{4}\,e^{4x + 1}$ een primitieve?

c Van welke functie is $H(x) = \dfrac{3^x}{\ln(3)}$ een primitieve?

d Van welke functie is $K(x) = \frac{1}{2}\sin(2x)$ een primitieve?

Theorie B Primitiveren

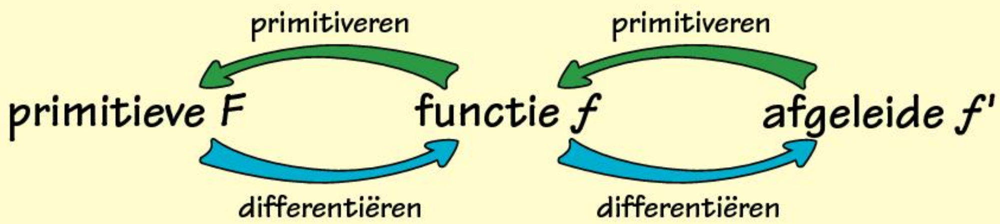
Het berekenen van primitieven heet **primitiveren**.
Omdat primitiveren het omgekeerde is van differentiëren, kun je vermoeden dat een primitieve van de functie $f(x) = x^n$, met $n \neq -1$, de functie $F(x) = \dfrac{1}{n + 1}x^{n + 1}$ is.
Om aan te tonen dat dit vermoeden juist is, differentieer je de functie F.

$F(x) = \dfrac{1}{n + 1}x^{n + 1}$ geeft $F'(x) = \dfrac{1}{n + 1} \cdot (n + 1)x^n = x^n$ en dit is $f(x)$.

Dus $F(x) = \dfrac{1}{n + 1}x^{n + 1}$ is een primitieve van $f(x) = x^n$ met $n \neq -1$.

Op dezelfde manier toon je in opgave 6 de juistheid aan van de primitieven in de kernzin hieronder.

$$f(x) = ax^n \text{ geeft } F(x) = a \cdot \frac{1}{n+1}x^{n+1} + c \text{ met } n \neq -1$$
$$f(x) = g^x \text{ geeft } F(x) = \frac{g^x}{\ln(g)} + c$$
$$f(x) = \mathrm{e}^x \text{ geeft } F(x) = \mathrm{e}^x + c$$
$$f(x) = \frac{1}{x} \text{ geeft } F(x) = \ln|x| + c$$
$$f(x) = \ln(x) \text{ geeft } F(x) = x\ln(x) - x + c$$
$$f(x) = {}^{g}\log(x) \text{ geeft } F(x) = \frac{1}{\ln(g)}(x\ln(x) - x) + c$$
$$f(x) = \sin(x) \text{ geeft } F(x) = -\cos(x) + c$$
$$f(x) = \cos(x) \text{ geeft } F(x) = \sin(x) + c$$



Voorbeeld

Primitiveer.

a $f(x) = 10x\sqrt{x}$

b $g(x) = \dfrac{x^6 + 2x^2 + 7}{x^2}$

c $h(x) = {}^{3}\log(3x)$

Uitwerking

a $f(x) = 10x\sqrt{x} = 10x^{1\frac{1}{2}}$ geeft $F(x) = 10 \cdot \dfrac{1}{2\frac{1}{2}}x^{2\frac{1}{2}} + c = 4x^2 \cdot \sqrt{x} + c$

b $g(x) = \dfrac{x^6 + 2x^2 + 7}{x^2} = x^4 + 2 + 7x^{-2}$ geeft

$G(x) = \frac{1}{5}x^5 + 2x + 7 \cdot \dfrac{1}{-1}x^{-1} + c = \frac{1}{5}x^5 + 2x - \dfrac{7}{x} + c$

c $h(x) = {}^{3}\log(3x) = {}^{3}\log(3) + {}^{3}\log(x) = 1 + {}^{3}\log(x)$ geeft

$H(x) = x + \dfrac{1}{\ln(3)}(x\ln(x) - x) + c$

6 Toon de juistheid aan van de primitieven in de kernzin hierboven.

R7 a Waarom geldt de regel $f(x) = ax^n$ geeft $F(x) = a \cdot \frac{1}{n+1}x^{n+1} + c$ niet voor $n = -1$?
b Geef de primitieven van $f(x) = x^{-1}$.
c Toon aan: als F een primitieve is van f, dan is $a \cdot F$ een primitieve van $a \cdot f$.

8 Primitiveer.

a $f(x) = 6x^2$
b $f(x) = 2x^3 + 5x^4$
c $f(x) = \frac{x^4 - 2x}{2x^3}$
d $f(x) = 10^x$
e $f(x) = 5 \cdot 2^x$
f $f(x) = x^2 + \sin(x)$
g $f(x) = \frac{x^3 + 2}{x^4}$
h $f(x) = x\sqrt{x} - 2\cos(x)$

9 Bereken de primitieven.

a $f(x) = x^3 - 3x$
b $f(x) = 5\,e^x$
c $f(x) = \frac{x^4 - 6}{2x^3}$
d $f(x) = 3^x + x^3$
e $f(x) = 2\ln(x)$
f $f(x) = \ln(2x)$

A10 Primitiveer.

a $f(x) = e^{x+1}$
b $f(x) = \frac{8}{x^3}$
c $f(x) = \frac{-x^2 + 2x + 3}{x^4}$
d $f(x) = \ln(x\sqrt{x})$
e $f(x) = {}^2\log\left(\frac{1}{x}\right)$
f $f(x) = 5 \cdot \log(2x)$

A11 Voor elke waarde van p is de functie f_p gegeven door $f_p(x) = p\sqrt{x} + 2px\sqrt{x}$.
Voor welke p en q is $F_q(x) = (3x + q)x\sqrt{x}$ een primitieve van f_p?

12 Gegeven is de functie $f(x) = 2x - 3$.
a Bereken de primitieven van f.
b De grafiek van een primitieve van f gaat door het punt $(1, 2)$. Bereken deze primitieve.
c De grafiek van een primitieve van f raakt de x-as. Bereken deze primitieve.

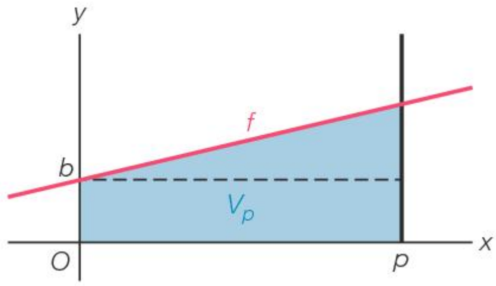
A13 Gegeven is de functie $f(x) = (x^2 - 1)^2$.
De grafiek van een primitieve van f gaat door het punt $(1, 7)$.
Bereken deze primitieve.

A14 De primitieve met integratieconstante 0 van de functie $f(x) = x^2\,e^{2x}$ is van de vorm $F(x) = (ax^2 + bx + c)\,e^{2x}$.
Bereken a, b en c.

015 Gegeven is de functie $f(x) = ax + b$ met $a > 0$ en $b > 0$. Voor $p > 0$ wordt het vlakdeel V_p ingesloten door de grafiek van f, de x-as, de y-as en de lijn $x = p$. Zie figuur 11.1.
De oppervlakte A van V_p is een functie van p.

a Toon aan dat $A(p) = \frac{1}{2}ap^2 + bp$.

b Bereken $A'(p)$. Wat valt op?

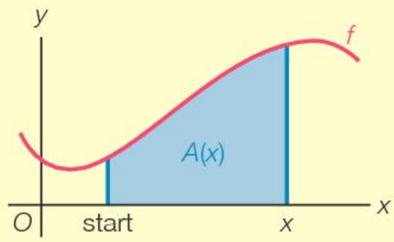


figuur 11.1

Theorie C Integralen

De oppervlakte $A(x)$ van het blauwe vlakdeel in figuur 11.2 is een primitieve van $f(x)$. Hiervoor tonen we aan dat $A'(x) = f(x)$.

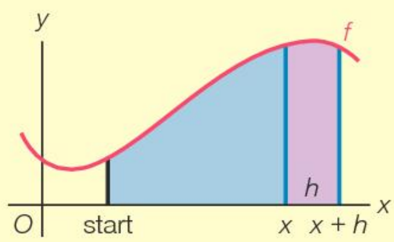
Je weet $A'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{A(x+h) - A(x)}{h}$ . . . **(1)**



figuur 11.2

In figuur 11.3 is de oppervlakte van het paarse vlakdeel gelijk aan $A(x+h) - A(x)$. Voor kleine waarden van h is het paarse vlakdeel te benaderen door een rechthoek met zijden h en $f(x)$, dus voor kleine waarden van h is
$A(x+h) - A(x) \approx f(x) \cdot h$, oftewel $f(x) \approx \dfrac{A(x+h) - A(x)}{h}$.

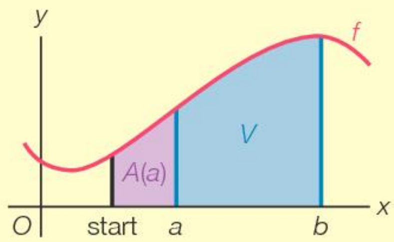
Zo krijg je $f(x) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{A(x+h) - A(x)}{h}$ . . . **(2)**



figuur 11.3

Uit **(1)** en **(2)** volgt $A'(x) = f(x)$, dus A is een primitieve van f.

De oppervlakte van het vlakdeel V in figuur 11.4 noteren we als $O(V) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.



figuur 11.4

Hierin is $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ een **bepaalde integraal**.

$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ spreek je uit als ‘de integraal van a tot b van f x d x’.

In figuur 11.4 is $O(V) = A(b) - A(a)$.
Je weet dat A een primitieve van f is, dus $A(x) = F(x) + c$.
Hieruit volgt

$$O(V) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = A(b) - A(a) = (F(b) + c) - (F(a) + c) = F(b) - F(a).$$

De formule $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$ wordt de

hoofdstelling van de integraalrekening genoemd.
In deze formule is $f(x)$ de **integrand**.

Merk op dat bij het berekenen van een integraal met behulp van een primitieve de constante c wegvalt. Neem dus bij zo'n berekening $c = 0$.

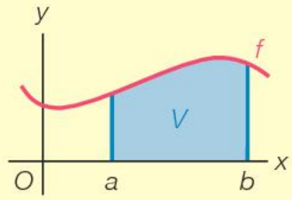
Het is de gewoonte om $F(b) - F(a)$ te noteren als $\left[F(x)\right]_a^b$.

$$\int_a^b f(x)\,dx = \left[F(x)\right]_a^b = F(b) - F(a)$$

Het berekenen van een integraal heet **integreren**.

De oppervlakte van het vlakdeel V dat boven de x-as ligt en wordt ingesloten door de grafiek van de functie f, de x-as en de lijnen $x = a$ en $x = b$ met $a < b$

is $O(V) = \int_a^b f(x)\,dx$.

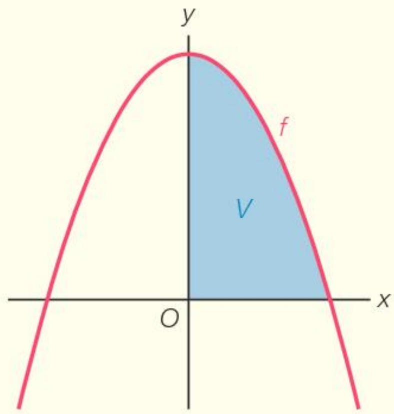


Voorbeeld

Het vlakdeel V wordt ingesloten door de grafiek van de functie $f(x) = 4 - x^2$, de positieve x-as en de y-as.

a Bereken exact de oppervlakte van V.

b De lijn $x = p$ verdeelt V in twee delen met gelijke oppervlakte.
Bereken p. Rond af op twee decimalen.



figuur 11.5

Uitwerking

a $f(x) = 0$ geeft $4 - x^2 = 0$

$x^2 = 4$

$x = 2 \vee x = -2$

$O(V) = \int_0^2 (4 - x^2)\,dx = \left[4x - \frac{1}{3}x^3\right]_0^2 = 8 - \frac{1}{3} \cdot 8 - 0 = 5\frac{1}{3}$

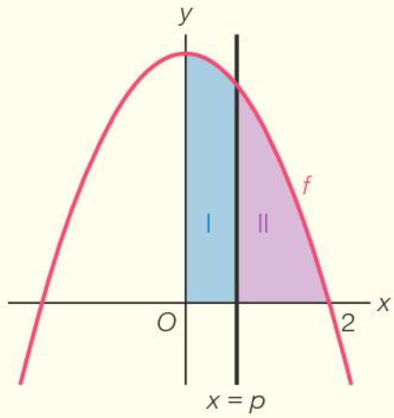
b $\int_0^p (4 - x^2)\,dx = 2\frac{2}{3}$ ← De helft van $5\frac{1}{3}$ is $2\frac{2}{3}$.

$\left[4x - \frac{1}{3}x^3\right]_0^p = 2\frac{2}{3}$

$4p - \frac{1}{3}p^3 - 0 = 2\frac{2}{3}$

$4p - \frac{1}{3}p^3 = 2\frac{2}{3}$

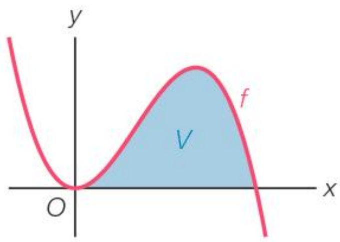
Voer in $y_1 = 4x - \frac{1}{3}x^3$ en $y_2 = 2\frac{2}{3}$.
De optie snijpunt geeft $x \approx 0{,}69$.
Dus $p \approx 0{,}69$.



16 Het vlakdeel V wordt ingesloten door de grafiek van de functie $f(x) = 3x^2 - x^3$ en de x-as.

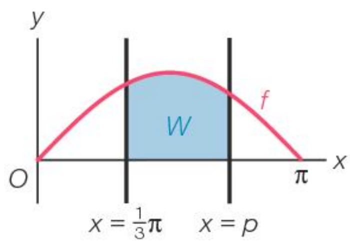
a Bereken algebraïsch de oppervlakte van V.

b De lijn $x = p$ verdeelt V in twee delen met gelijke oppervlakte.
Bereken p. Rond af op twee decimalen.



figuur 11.6

17 Gegeven is de functie $f(x) = \sin(x)$ met domein $[0, \pi]$.
Het vlakdeel V wordt ingesloten door de grafiek van f en de x-as. Het vlakdeel W wordt ingesloten door de grafiek van f, de x-as en de lijnen $x = \frac{1}{3}\pi$ en $x = p$ met $p > \frac{1}{3}\pi$.
Bereken exact voor welke waarde van p de oppervlakte van W de helft is van de oppervlakte van V.

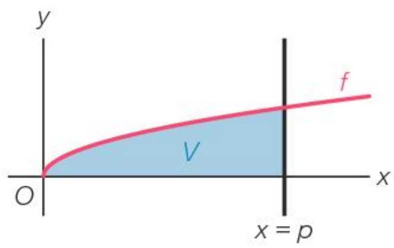


figuur 11.7

18 Gegeven is de functie $f(x) = \sqrt{x}$.
Het vlakdeel V wordt ingesloten door de grafiek van f, de x-as en de lijn $x = p$.

a Neem $p = 12$ en bereken exact de oppervlakte van V.

b Bereken algebraïsch voor welke waarde van p de oppervlakte van V gelijk is aan 18.



figuur 11.8

Het vlakdeel W_1 wordt ingesloten door de grafiek van f, de x-as en de lijn $x = 4$.
Het vlakdeel W_2 wordt ingesloten door de grafiek van f, de x-as en de lijnen $x = 4$ en $x = p$ met $p > 4$.

c Bereken exact voor welke waarde van p geldt $O(W_1) = O(W_2)$.

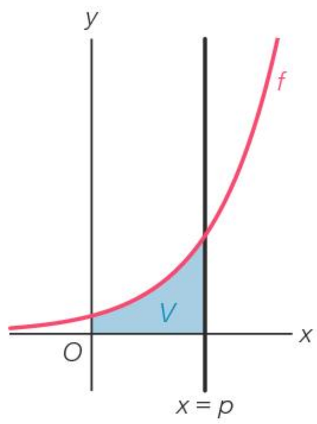
19

Gegeven is de functie $f(x) = e^x$.
Het vlakdeel V wordt ingesloten door de grafiek van f, de x-as, de y-as en de lijn $x = p$ met $p > 0$.

a Bereken exact voor welke waarde van p de oppervlakte van V gelijk is aan 5.

Het vlakdeel W wordt ingesloten door de grafiek van f, de x-as en de lijnen $x = p$ en $x = 2p$ met $p > 0$.

b Bereken exact voor welke waarde van p de oppervlakte van W twee keer zo groot is als de oppervlakte van V.



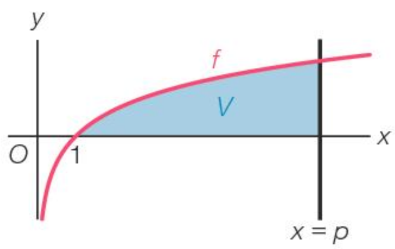
figuur 11.9

A20

Het vlakdeel V wordt ingesloten door de grafiek van de functie $f(x) = \ln(x)$, de x-as en de lijn $x = p$ met $p > 1$.

a Neem $p = e^2$ en bereken exact de oppervlakte van V.

b Bereken voor welke waarde van p de oppervlakte van V gelijk is aan 10. Rond af op drie decimalen.



figuur 11.10

A21

Voor elke $p > 0$ is de functie f_p gegeven door $f_p(x) = p\sin^3(x)$ met domein $[0, \pi]$.
Een primitieve van f_p is $F_p(x) = \frac{1}{3}p\cos^3(x) - p\cos(x)$.

a Bewijs dat de formule van F_p juist is.

b Bereken exact voor welke p de oppervlakte van het vlakdeel dat wordt ingesloten door de grafiek van f_p en de x-as gelijk is aan 4.

Terugblik

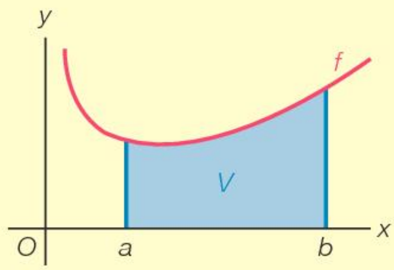
Primitieve functies en primitiveren

Elke functie F waarvoor geldt $F' = f$ is een primitieve functie van f.
Als F een primitieve van f is, dan zijn alle functies $F + c$ primitieven van f. Het getal c heet de integratieconstante.

$f(x) =$	$F(x) =$	$f(x) =$	$F(x) =$
ax^n	$a \cdot \dfrac{1}{n+1}x^{n+1} + c \quad (n \neq -1)$	$\ln(x)$	$x\ln(x) - x + c$
g^x	$\dfrac{g^x}{\ln(g)} + c$	${}^g\log(x)$	$\dfrac{1}{\ln(g)}(x\ln(x) - x) + c$
e^x	$e^x + c$	$\sin(x)$	$-\cos(x) + c$
$\dfrac{1}{x}$	$\ln\|x\| + c$	$\cos(x)$	$\sin(x) + c$

- $f(x) = \dfrac{x^3 + x^2 - 7x}{x^2} = x + 1 - 7 \cdot \dfrac{1}{x}$ geeft $F(x) = \frac{1}{2}x^2 + x - 7\ln|x| + c$
- $g(x) = \ln(\sqrt[3]{x}) = \ln(x^{\frac{1}{3}}) = \frac{1}{3}\ln(x)$ geeft $G(x) = \frac{1}{3}(x\ln(x) - x) + c$
- $h(x) = e^x + e^3 + 3^x$ geeft $H(x) = e^x + e^3x + \dfrac{3^x}{\ln(3)} + c$

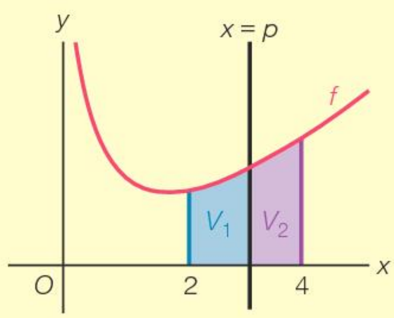
Oppervlakten



De oppervlakte van het vlakdeel V in de figuur hiernaast is $\int_a^b f(x)\,dx = \left[F(x)\right]_a^b = F(b) - F(a)$. Hierin is $\int_a^b f(x)\,dx$ een bepaalde integraal en is $f(x)$ de integrand.

Bij $f(x) = \dfrac{x^3 + 2}{x^2}$ en de grenzen $a = 2$ en $b = 4$ krijg je

$$O(V) = \int_2^4 f(x)\,dx = \int_2^4 (x + 2x^{-2})\,dx = \left[\tfrac{1}{2}x^2 - 2x^{-1}\right]_2^4 = \left[\tfrac{1}{2}x^2 - \frac{2}{x}\right]_2^4$$
$$= 8 - \tfrac{1}{2} - (2 - 1) = 6\tfrac{1}{2}.$$



Om te berekenen voor welke p de lijn $x = p$ het vlakdeel V in twee delen met gelijke oppervlakte verdeelt, los je de vergelijking $\int_2^p f(x)\,dx = 3\frac{1}{4}$ op.

Dit geeft $\left[\tfrac{1}{2}x^2 - \dfrac{2}{x}\right]_2^p = 3\frac{1}{4}$, dus $\frac{1}{2}p^2 - \dfrac{2}{p} - (2 - 1) = 3\frac{1}{4}$.
Oplossen met de GR geeft $p \approx 3{,}13$.

11.2 Oppervlakten

O22 Gegeven is de functie $f(x) = (3x + 1)^5$.
De primitieven van f zijn van de vorm $F(x) = a(3x + 1)^6 + c$.
a Toon aan dat $F'(x) = 18a(3x + 1)^5$.
b Bereken a.

Theorie A Primitieven en de kettingregel

Bij het primitiveren kan de kettingregel een rol spelen.
Om de primitieve van de functie $f(x) = \sqrt{4x - 1}$ met integratieconstante 0 op te sporen, schrijf je $f(x) = (4x - 1)^{\frac{1}{2}}$.
Een primitieve is van de vorm $F(x) = a \cdot (4x - 1)^{1\frac{1}{2}}$.
$F'(x) = a \cdot 1\frac{1}{2}(4x - 1)^{\frac{1}{2}} \cdot 4 = 6a\sqrt{4x - 1}$
$F'(x) = f(x)$, dus $6a = 1$ oftewel $a = \frac{1}{6}$.
Dus $F(x) = \frac{1}{6}(4x - 1)^{1\frac{1}{2}} = \frac{1}{6}(4x - 1)\sqrt{4x - 1}$.

In plaats van te werk te gaan zoals hierboven, kun je ook de volgende regel gebruiken.

De primitieven van $f(ax + b)$ zijn $\frac{1}{a}F(ax + b) + c$.

De primitieven in de kernzin op bladzijde 101 kunnen met deze regel algemener worden geformuleerd.
Zo krijg je bijvoorbeeld

- De primitieven van $f(x) = e^{ax + b}$ zijn $F(x) = \frac{1}{a}e^{ax + b} + c$.
- De primitieven van $f(x) = \sin(ax + b)$ zijn $F(x) = -\frac{1}{a}\cos(ax + b) + c$.

Zie verder opgave 24.

Voorbeeld

Primitiveer de functie $f(x) = \sqrt{4x - 1}$.

Uitwerking
$f(x) = \sqrt{4x - 1} = (4x - 1)^{\frac{1}{2}}$ geeft
$F(x) = \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3}(4x - 1)^{1\frac{1}{2}} + c = \frac{1}{6}(4x - 1)\sqrt{4x - 1} + c$

23 Toon aan dat $\frac{1}{a}F(ax + b) + c$ primitieven zijn van $f(ax + b)$.

24 Gebruik de regel

de primitieven van $f(ax + b)$ zijn $\frac{1}{a}F(ax + b) + c$

voor het berekenen van de primitieven.

a $f(x) = (ax + b)^n$

b $f(x) = g^{ax+b}$

c $f(x) = \frac{1}{ax + b}$

d $f(x) = \ln(ax + b)$

e $f(x) = {}^g\log(ax + b)$

f $f(x) = \cos(ax + b)$

25 Bereken de primitieven.

a $f(x) = (2x - 1)^6$

b $f(x) = \frac{1}{(3x + 4)^3}$

c $f(x) = 4\sqrt{3 - 2x}$

d $f(x) = \frac{2}{\sqrt{1 - x}}$

e $f(x) = \sin(2x + \frac{1}{3}\pi)$

f $f(x) = 3\cos(\frac{1}{2}x - \frac{1}{6}\pi)$

26 Primitiveer.

a $f(x) = \frac{1}{x - 1}$

b $f(x) = (2x + 1)\sqrt{2x + 1}$

c $f(x) = e^{4x-1}$

d $f(x) = \ln(4x - 1)$

e $f(x) = \frac{3}{2x - 5}$

f $f(x) = 2^{3x}$

g $f(x) = 3^{2-5x}$

h $f(x) = {}^2\log(5x + 3)$

27 Bereken de primitieven.

a $f(x) = \frac{3}{(2x - 1)^4}$

b $f(x) = (4x + 3)\sqrt{4x + 3}$

c $f(x) = 2\sin(3x + \frac{1}{2}\pi)$

d $f(x) = x^2 - \ln(\frac{1}{2}x + 1)$

e $f(x) = \frac{6}{3x + 1}$

f $f(x) = e^{4x+1} - 4^{ex}$

g $f(x) = 5 \cdot \log(3x + 2)$

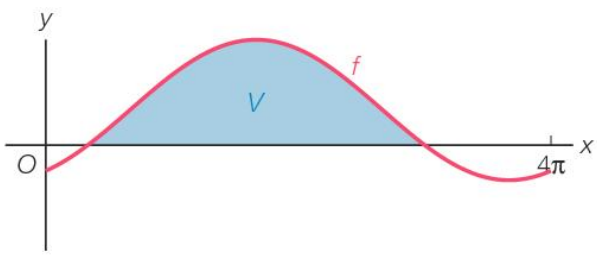
h $f(x) = 3x - \cos(3x + 1)$

28 Bereken exact.

a $\int_{\frac{1}{6}\pi}^{\frac{1}{3}\pi} 2\sin(x - \frac{1}{6}\pi)\,dx$

b $\int_{0}^{\frac{1}{3}\pi} (2x + \cos(\frac{1}{2}x))\,dx$

A29 Gegeven is de functie
$f(x) = 1 + 2\cos(\frac{1}{2}x - \frac{5}{6}\pi)$ met domein $[0, 4\pi]$.
Bereken exact de oppervlakte van het vlakdeel V dat wordt ingesloten door de grafiek van f en de x-as.



figuur 11.11

A30 Gegeven is de functie $f(x) = \ln(\frac{1}{2}x - 1)$.
Het vlakdeel V wordt ingesloten door de grafiek van f, de x-as en de lijn $x = 6$.
Het vlakdeel W wordt ingesloten door de grafiek van f, de x-as en de lijnen $x = 6$ en $x = p$ met $p > 6$.
Bereken voor welke p de oppervlakte van V gelijk is aan de oppervlakte van W. Rond af op twee decimalen.

A31 Gegeven is de functie $f(x) = 2\,e^{1 - \frac{1}{3}x}$ en de lijnen k: $x = -p$ en l: $x = p$ met $p > 0$. Het vlakdeel V wordt ingesloten door de grafiek van f, de x-as, de y-as en de lijn k. Het vlakdeel W wordt ingesloten door de grafiek van f, de x-as, de y-as en de lijn l.
Bereken exact voor welke waarde van p de oppervlakte van V twee keer zo groot is als de oppervlakte van W.

R32 Je weet $f(x) = \sqrt{4x - 1}$ geeft $F(x) = \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3}(4x - 1)^{1\frac{1}{2}} + c$.

a Waarom kun je de hierbij gebruikte regel niet hanteren bij het zoeken van de primitieven van $g(x) = \sqrt{4x^2 - 1}$?

Voor het zoeken van de primitieven van $g(x) = \sqrt{4x^2 - 1}$ zou je misschien denken te kunnen uitgaan van $G(x) = a(4x^2 - 1)^{1\frac{1}{2}}$.

b Licht toe dat je ook op deze manier geen primitieven van g kunt vinden.

O33 In figuur 11.12 wordt het vlakdeel V ingesloten door de grafieken van de functies f en g.
Je gaat in deze opgave bewijzen dat

$$O(V) = \int_a^b (f(x) - g(x))\,dx.$$

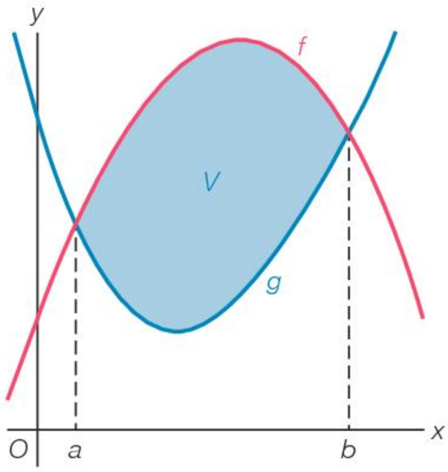
Er geldt $O(V) = \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx$.

a Licht dit toe.

Uit $O(V) = \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx$ volgt
$O(V) = F(b) - G(b) - (F(a) - G(a))$, waarbij F een primitieve van f is en G een primitieve van g.

b Toon dit aan.

c Maak het bewijs af.

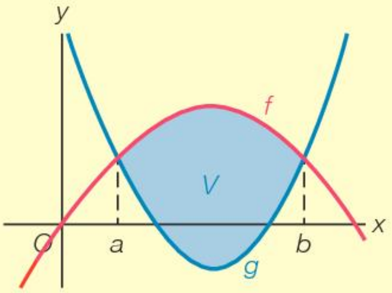


figuur 11.12

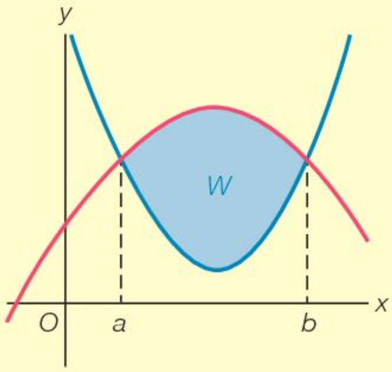
Theorie B Oppervlakte van een vlakdeel tussen grafieken

In opgave 33 heb je bewezen dat in figuur 11.12 geldt dat

$$O(V) = \int_a^b (f(x) - g(x))\,dx.$$



figuur 11.13



figuur 11.14

Ook in figuur 11.13 geldt $O(V) = \int_a^b (f(x) - g(x))\,dx$.

Dit kun je inzien door de grafieken van f en g beide c omhoog te schuiven. Zie figuur 11.14.

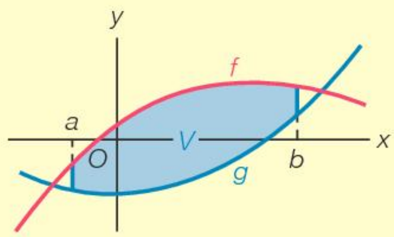
$$O(W) = \int_a^b (f(x) + c)\,dx - \int_a^b (g(x) + c)\,dx$$

$$= \int_a^b (f(x) + c - g(x) - c)\,dx = \int_a^b (f(x) - g(x))\,dx$$

De oppervlakte tussen twee grafieken is

$$\int_a^b (\text{bovenste} - \text{onderste})\,dx.$$

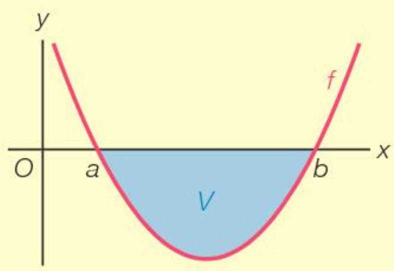
De oppervlakte van het vlakdeel V dat wordt ingesloten door de lijnen $x = a$ en $x = b$ en de grafieken van de functies f en g met $f(x) \geq g(x)$ op het interval $[a, b]$, is $O(V) = \int_a^b (f(x) - g(x))\,dx$.



De oppervlakte van het vlakdeel V in figuur 11.15 is

$$O(V) = \int_a^b (0 - f(x))\,dx = \int_a^b -f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx.$$

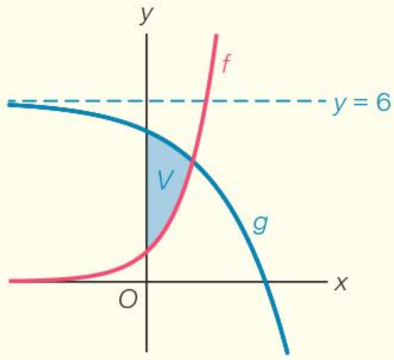
De bovenste grafiek is de lijn $y = 0$.



figuur 11.15

Voorbeeld

Het vlakdeel V wordt ingesloten door de grafieken van de functies $f(x) = \mathrm{e}^x$ en $g(x) = 6 - \mathrm{e}^{\frac{1}{2}x}$ en de y-as.
Zie figuur 11.16.
Bereken exact de oppervlakte van V.



figuur 11.16

Uitwerking

$f(x) = g(x)$ geeft $\mathrm{e}^x = 6 - \mathrm{e}^{\frac{1}{2}x}$

$\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{\frac{1}{2}x} - 6 = 0$

Stel $\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x} = u$.

$u^2 + u - 6 = 0$

$(u-2)(u+3) = 0$

$u = 2 \vee u = -3$

$\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x} = 2 \vee \mathrm{e}^{\frac{1}{2}x} = -3$

$\frac{1}{2}x = \ln(2)$

$x = 2\ln(2)$

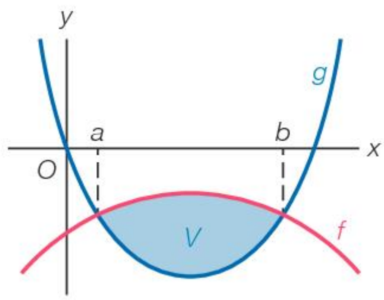
$$O(V) = \int_0^{2\ln(2)} (g(x) - f(x))\,\mathrm{d}x$$

$$= \int_0^{2\ln(2)} (6 - \mathrm{e}^{\frac{1}{2}x} - \mathrm{e}^x)\,\mathrm{d}x = \left[6x - 2\,\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x} - \mathrm{e}^x\right]_0^{2\ln(2)}$$

$$= 12\ln(2) - 2 \cdot \underbrace{2}_{\boxed{\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x} = 2}} - \underbrace{4}_{\boxed{\mathrm{e}^x = (\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x})^2 = 2^2 = 4}} - (0 - 2 - 1) = 12\ln(2) - 5$$

R34 Zie de theorie op de vorige bladzijde.
Toon aan dat ook in figuur 11.17 geldt dat

$$O(V) = \int_a^b (f(x) - g(x))\,\mathrm{d}x.$$

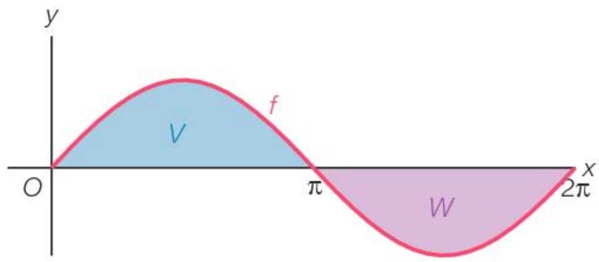


figuur 11.17

35 In figuur 11.18 is de grafiek getekend van de functie $f(x) = \sin(x)$ met $D_f = [0, 2\pi]$.
Het vlakdeel V ligt boven de x-as en wordt ingesloten door de grafiek van f en de x-as.
Het vlakdeel W ligt onder de x-as en wordt ingesloten door de grafiek van f en de x-as.

a Bereken $O(V)$ en $O(W)$.

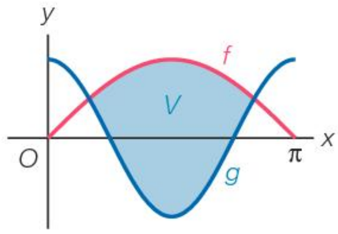
b Bereken $\int_0^{2\pi} f(x)\,\mathrm{d}x$. Licht de uitkomst toe.



figuur 11.18

36

Gegeven zijn de functies $f(x) = \sin(x)$ en $g(x) = \cos(2x)$ met domein $[0, \pi]$.
Bereken exact de oppervlakte van het vlakdeel V dat wordt ingesloten door de grafieken van f en g.



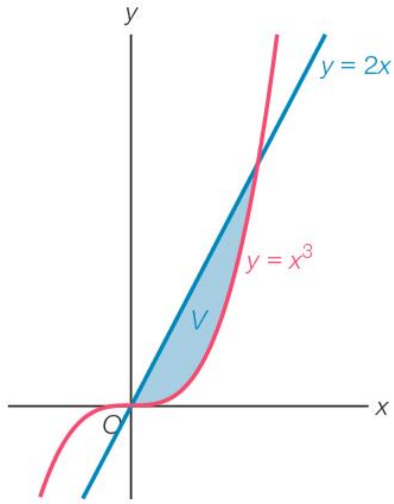
figuur 11.19

37

Het vlakdeel V in figuur 11.20 wordt ingesloten door de grafiek van $y = x^3$ en de lijn $y = 2x$.

a Bereken algebraïsch de oppervlakte van V.

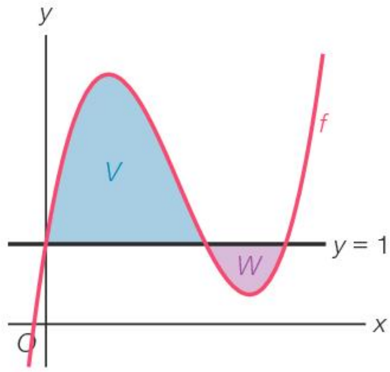
b De lijn $x = p$ verdeelt V in twee delen met gelijke oppervlakte.
Bereken p exact.



figuur 11.20

38

Gegeven is de functie $f(x) = x^3 - 5x^2 + 6x + 1$.
Het vlakdeel V ligt boven de lijn $y = 1$ en wordt ingesloten door de lijn $y = 1$ en de grafiek van f.
Het vlakdeel W ligt onder de lijn $y = 1$ en wordt ingesloten door de lijn $y = 1$ en de grafiek van f.
Bereken exact hoeveel keer zo groot de oppervlakte van V is als de oppervlakte van W.



figuur 11.21

39

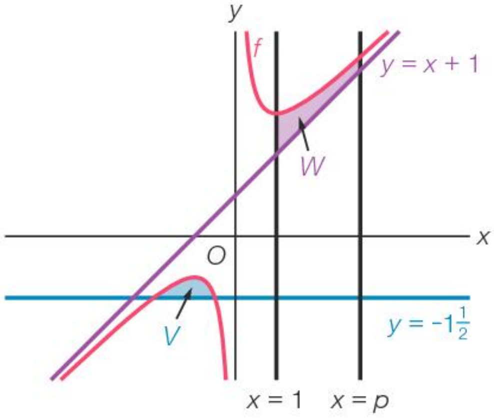
Gegeven zijn de functies $f(x) = x - 2\sqrt{x}$ en $g(x) = -x$.
Het vlakdeel V wordt ingesloten door de grafieken van f en g. Het vlakdeel W wordt ingesloten door de grafiek van f en de x-as.
Bewijs dat de oppervlakte van W acht keer zo groot is als de oppervlakte van V.

A40

Gegeven is de functie $f(x) = \dfrac{x^2 + x + 1}{x}$.

a Het vlakdeel V wordt ingesloten door de grafiek van f en de lijn $y = -1\frac{1}{2}$.
Bereken exact de oppervlakte van V.

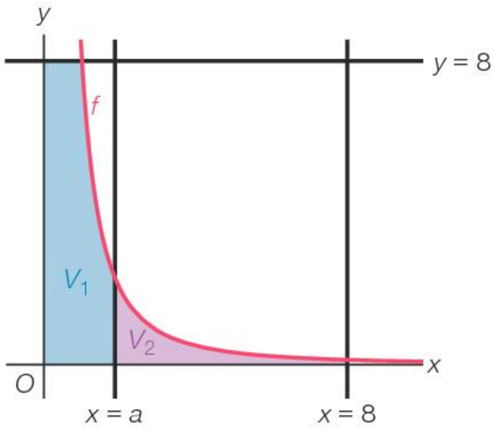
b Het vlakdeel W wordt ingesloten door de grafiek van f en de lijnen $y = x + 1$, $x = 1$ en $x = p$ met $p > 1$.
Bereken exact voor welke p de oppervlakte van W gelijk is aan 2.



figuur 11.22

A41 De grafiek van de functie $f(x) = 3^x$, de y-as en de lijn $y = 9$ sluiten het vlakdeel V in.
De lijn $x = a$ verdeelt V in twee delen met gelijke oppervlakte.
Bereken a. Rond af op twee decimalen.

A42 Het vlakdeel V wordt ingesloten door de grafiek van de functie $f(x) = \frac{8}{x^2}$, de x-as, de y-as en de lijnen $x = 8$ en $y = 8$.
De lijn $x = a$ verdeelt V in de vlakdelen V_1 en V_2, waarbij $O(V_1) : O(V_2) = 2 : 1$. Zie figuur 11.23.
Bereken exact de waarde van a.

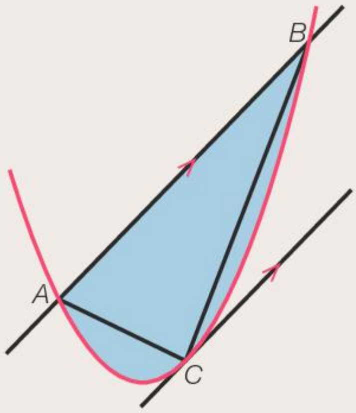


figuur 11.23

GESCHIEDENIS

De oppervlakte onder een kromme

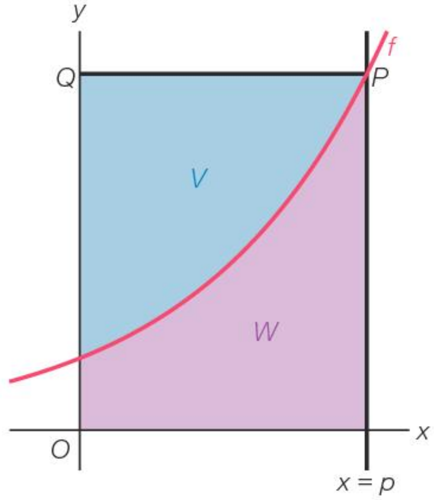
De eerste die oppervlakten van vlakdelen met kromme grenslijnen berekende was Archimedes (287-212 v.C.). Naast de bekende formule $O = \pi r^2$ voor de oppervlakte van een cirkel, bewees hij dat de oppervlakte van een paraboolsegment gelijk is aan $\frac{4}{3}$ keer de oppervlakte van de grootste driehoek die nog net past in het segment.
Na Archimedes duurde het bijna 2000 jaar voordat er nieuwe vorderingen werden gemaakt bij het berekenen van de oppervlakten van vlakdelen met kromme grenslijnen.
Het was Bonaventura Cavalieri die in 1635 een boek publiceerde waarin de eerste beginselen van de integraalrekening stonden.
Na Cavalieri kwam de ontwikkeling van de differentiaal- en integraalrekening in een stroomversnelling.
Vooral Newton en Leibniz hebben hier vanaf ongeveer 1660 grote bijdragen aan geleverd. Van steeds meer functies kon een primitieve exact worden berekend.
Tegenwoordig is het mogelijk om primitieve functies door de computer te laten berekenen. De computer gebruikt hierbij eigenlijk een tabellenboek met primitieven.
En in het geval de primitieve door de computer niet gevonden kan worden, berekent de computer de integraal door van een groot aantal hele smalle rechthoekjes de som van de oppervlakten te bepalen. Ook je grafische rekenmachine rekent op deze manier.



Archimedes bewees dat het blauwe vlakdeel $\frac{4}{3}$ keer zo groot is als de oppervlakte van driehoek ABC.

A43 ◻⊙✱ Gegeven is de functie $f(x) = 3 - \dfrac{4}{x+2}$.
De grafiek van f snijdt de grafiek van f^{inv} in de punten $A(a, a)$ en $B(b, b)$. Het vlakdeel V wordt ingesloten door de grafieken van f en f^{inv}.
Bereken exact de oppervlakte van V.

A44 ⊙✱ Gegeven is de functie $f(x) = 2\,\mathrm{e}^{0{,}2x}$.
De lijn $x = p$ snijdt de grafiek van f in het punt P.
De horizontale lijn door P snijdt de y-as in het punt Q. Het vlakdeel V wordt ingesloten door de lijn door P en Q, de y-as en de grafiek van f.
Het vlakdeel W wordt ingesloten door de grafiek van f, de x-as, de y-as en de lijn $x = p$. Zie figuur 11.24.
Bereken voor welke p de oppervlakte van V gelijk is aan de oppervlakte van W. Rond af op twee decimalen.

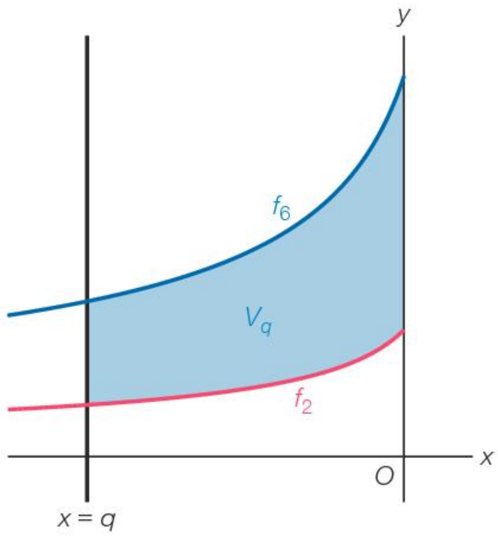


figuur 11.24

A45 ✱ Voor elke $p > 0$ is de functie f_p gegeven door
$f_p(x) = \dfrac{p}{\sqrt{1-x}}$.
Een primitieve van f_p is $F_p(x) = -2p\sqrt{1-x}$.

a Bewijs dit.

b Het vlakdeel V_q wordt ingesloten door de grafieken van f_2 en f_6, de lijn $x = q$ met $q < 0$ en de y-as.
Bereken exact voor welke q de oppervlakte van V_q gelijk is aan 12.

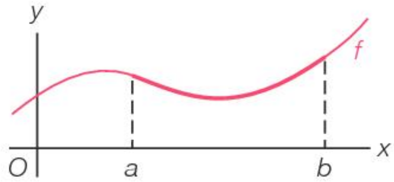


figuur 11.25

A46 Gegeven is de functie $f(x) = \ln(x)$. Het vlakdeel V wordt ingesloten door de grafiek van f, de x-as en de lijnen $x = 2\sqrt{2}$ en $x = p$ met $p > 2\sqrt{2}$.

a Neem $p = 4\sqrt{2}$ en bewijs dat de oppervlakte van V gelijk is aan $\sqrt{2} \cdot (7\ln(2) - 2)$.

Voor de lengte L van de grafiek van een functie f tussen $x = a$ en $x = b$ bestaat de formule $L = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\,dx$.



figuur 11.26

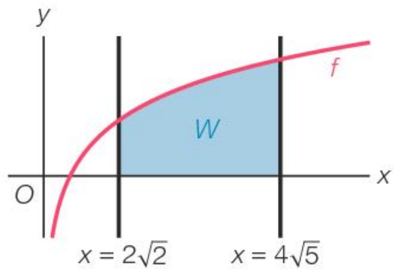
In vraag b gebruik je deze formule om de lengte van de grafiek van $f(x) = \ln(x)$ tussen $x = 2\sqrt{2}$ en $x = p$ met $p = 4\sqrt{5}$ te berekenen. Hierbij gebruik je ook dat de functie

$G(x) = \sqrt{x^2+1} - \ln\left(\dfrac{1+\sqrt{x^2+1}}{x}\right)$ een primitieve is van

de functie $g(x) = \dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x}$.

b Bereken exact de lengte L van de grafiek van $f(x) = \ln(x)$ tussen $x = 2\sqrt{2}$ en $x = 4\sqrt{5}$. Schrijf het antwoord in de vorm $a + \ln(b)$.

c Het vlakdeel W wordt ingesloten door de grafiek van f, de x-as en de lijnen $x = 2\sqrt{2}$ en $x = 4\sqrt{5}$. Bereken de omtrek van W. Rond af op twee decimalen.



figuur 11.27

E47 In opgave 46 heb je gebruikt dat $G(x) = \sqrt{x^2+1} - \ln\left(\dfrac{1+\sqrt{x^2+1}}{x}\right)$

een primitieve is van $g(x) = \dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x}$.

Bewijs dat deze primitieve juist is.

Terugblik

Primitieven en de kettingregel.

Als F een primitieve is van f, dan is $\frac{1}{a}F(ax+b)$ een primitieve van $f(ax+b)$.

Deze regel geeft bijvoorbeeld dat $F(x) = \frac{1}{a}((ax+b)\ln(ax+b) - (ax+b)) + c$

de primitieven zijn van $f(x) = \ln(ax+b)$.

- $f(x) = \frac{6}{(2x-3)^4} = 6(2x-3)^{-4}$ geeft

  $F(x) = 6 \cdot \frac{1}{2} \cdot -\frac{1}{3}(2x-3)^{-3} + c = \frac{-1}{(2x-3)^3} + c$
- $g(x) = 3\sqrt{2x-1} = 3(2x-1)^{\frac{1}{2}}$ geeft

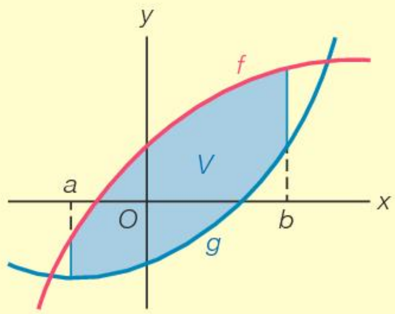
  $G(x) = 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3}(2x-1)^{1\frac{1}{2}} + c = (2x-1)\sqrt{2x-1} + c$
- $h(x) = 5\,\mathrm{e}^{4x-3}$ geeft $H(x) = 5 \cdot \frac{1}{4}\,\mathrm{e}^{4x-3} + c = 1\frac{1}{4}\,\mathrm{e}^{4x-3} + c$
- $k(x) = \frac{3}{4x-1}$ geeft $K(x) = 3 \cdot \frac{1}{4}\ln|4x-1| + c = \frac{3}{4}\ln|4x-1| + c$
- $l(x) = 5 \cdot 2^{3-x}$ geeft $L(x) = 5 \cdot -1 \cdot \frac{2^{3-x}}{\ln(2)} + c = \frac{-5 \cdot 2^{3-x}}{\ln(2)} + c$
- $p(x) = 2\sin(1\frac{1}{2}x - \frac{1}{3}\pi)$ geeft

  $P(x) = 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot -\cos(1\frac{1}{2}x - \frac{1}{3}\pi) + c = -1\frac{1}{3}\cos(1\frac{1}{2}x - \frac{1}{3}\pi) + c$

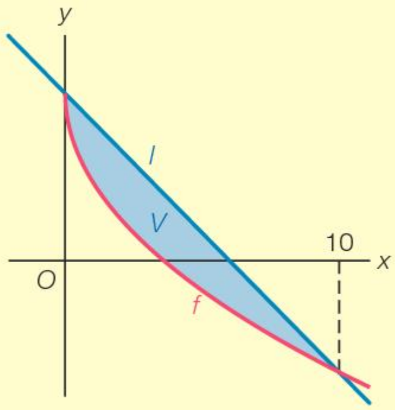
Oppervlakte van een vlakdeel tussen grafieken

De oppervlakte van het vlakdeel V dat wordt ingesloten door de lijnen $x = a$ en $x = b$ en de grafieken van de functies f en g met $f(x) \geq g(x)$ op het interval $[a, b]$, is

$$O(V) = \int_a^b (f(x) - g(x))\,\mathrm{d}x.$$



Het vlakdeel V van de figuur hiernaast wordt ingesloten door de grafiek van de functie $f(x) = 6 - \sqrt{10x}$ en de lijn l: $y = -x + 6$.
Oplossen van de vergelijking $6 - \sqrt{10x} = -x + 6$ geeft $x = 0 \vee x = 10$.



Dus $O(V) = \int_0^{10} (-x + 6 - (6 - \sqrt{10x}))\,\mathrm{d}x = \int_0^{10} (\sqrt{10x} - x)\,\mathrm{d}x$

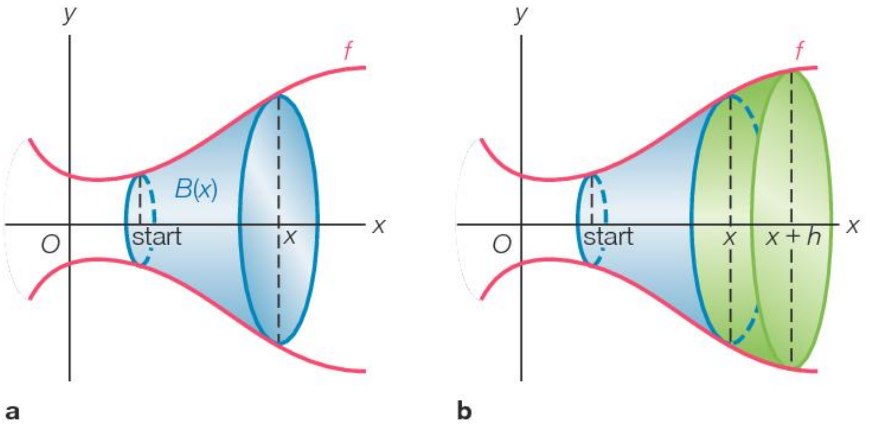
$= \int_0^{10} ((10x)^{\frac{1}{2}} - x)\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{10} \cdot \frac{2}{3}(10x)^{1\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}x^2\right]_0^{10}$

$= \left[\frac{1}{15} \cdot 10x\sqrt{10x} - \frac{1}{2}x^2\right]_0^{10} = \left[\frac{2}{3}x\sqrt{10x} - \frac{1}{2}x^2\right]_0^{10}$

$= \frac{2}{3} \cdot 10 \cdot 10 - \frac{1}{2} \cdot 10^2 - 0 = 16\frac{2}{3}.$

11.3 Inhouden

O48 In figuur 11.28a wordt de grafiek van de functie f gewenteld om de x-as.
$B(x)$ is de inhoud van het blauwe lichaam dat zo ontstaat.



figuur 11.28

In figuur 11.28b is de inhoud van het groene lichaam gelijk aan $B(x+h) - B(x)$.
Als $h \approx 0$, dan is $f(x+h) \approx f(x)$ en is de inhoud van het groene lichaam te benaderen door $\pi \cdot (f(x))^2 \cdot h$.

a Licht dit toe.

b Hoe volgt uit bovenstaande dat $B(x)$ een primitieve is van $\pi \cdot (f(x))^2$?

Theorie A De inhoud van een omwentelingslichaam

Voor de inhoudsfunctie B in opgave 48 geldt $B'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{B(x+h) - B(x)}{h}$ . . . **(1)**

In figuur 11.28b is het groene lichaam te benaderen door een cilinder met oppervlakte grondvlak $\pi \cdot (f(x))^2$ en hoogte h, dus
$B(x+h) - B(x) \approx \pi \cdot (f(x))^2 \cdot h$.

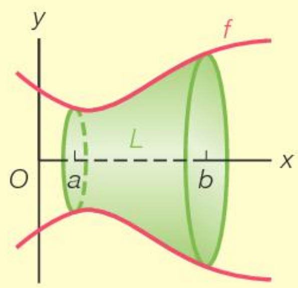
Hieruit volgt dat $\dfrac{B(x+h) - B(x)}{h} \approx \pi \cdot (f(x))^2$, dus

$\pi \cdot (f(x))^2 = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{B(x+h) - B(x)}{h}$ . . . **(2)**

Uit **(1)** en **(2)** volgt $B'(x) = \pi \cdot (f(x))^2$, dus $B(x)$ is een primitieve van $\pi \cdot (f(x))^2$.

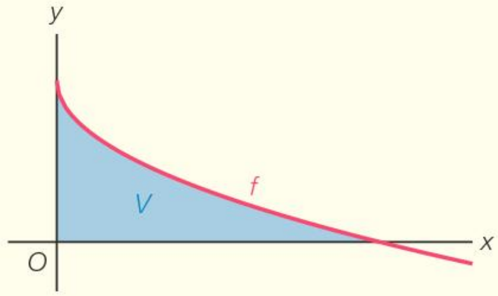
Als V een vlakdeel is dat wordt ingesloten door de grafiek van de functie f, de x-as en de lijnen $x = a$ en $x = b$, dan is de inhoud van het **omwentelingslichaam** dat ontstaat als V wentelt om de x-as te noteren met de integraal $\pi \displaystyle\int_a^b (f(x))^2 \, dx$.

Het vlakdeel V ligt boven de x-as en wordt ingesloten door de grafiek van de functie f, de x-as en de lijnen $x = a$ en $x = b$ met $a < b$.
De inhoud van het lichaam L dat ontstaat als V wentelt om de x-as is $I(L) = \pi \int_a^b (f(x))^2 \, dx$.



Voorbeeld

Het vlakdeel V wordt ingesloten door de grafiek van de functie $f(x) = 2 - \sqrt{x}$, de x-as en de y-as.
Bereken exact de inhoud van het lichaam L dat ontstaat als V wentelt om de x-as.



figuur 11.29

Uitwerking

$f(x) = 0$ geeft $2 - \sqrt{x} = 0$

$\sqrt{x} = 2$

$x = 4$

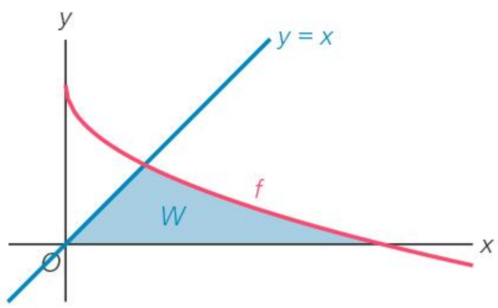
$$I(L) = \pi \int_0^4 (2 - \sqrt{x})^2 \, dx = \pi \int_0^4 (4 - 4\sqrt{x} + x) \, dx = \pi \int_0^4 (4 - 4x^{\frac{1}{2}} + x) \, dx$$

$$= \pi \left[4x - \frac{4}{1\frac{1}{2}} x^{1\frac{1}{2}} + \tfrac{1}{2}x^2 \right]_0^4 = \pi \left[4x - \tfrac{8}{3}x\sqrt{x} + \tfrac{1}{2}x^2 \right]_0^4$$

$$= \pi(4 \cdot 4 - \tfrac{8}{3} \cdot 4 \cdot 2 + \tfrac{1}{2} \cdot 4^2 - 0) = 2\tfrac{2}{3}\pi$$

49

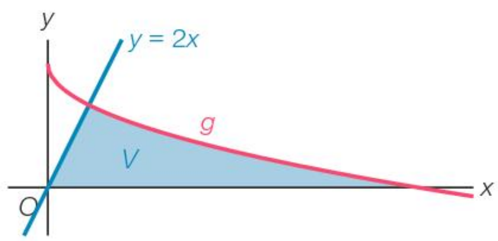
Gegeven is de functie $f(x) = 2 - \sqrt{x}$ van het voorbeeld.
Het vlakdeel W wordt ingesloten door de grafiek van f, de lijn $y = x$ en de x-as. Zie figuur 11.30.
Bereken exact de inhoud van het lichaam K dat ontstaat als W wentelt om de x-as.



figuur 11.30

50 *

Het vlakdeel V wordt ingesloten door de grafiek van de functie $g(x) = 3 - \sqrt{x}$, de lijn $y = 2x$ en de x-as. Zie figuur 11.31.
Bereken exact de inhoud van het lichaam L dat ontstaat als V wentelt om de x-as.

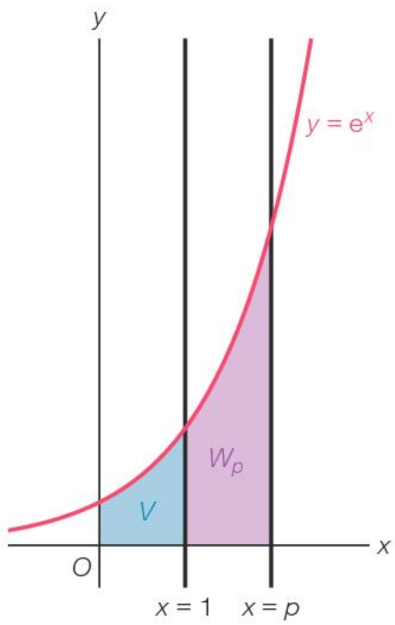


figuur 11.31

51 Gegeven is de functie $f(x) = e^x$.
Het vlakdeel V wordt ingesloten door de grafiek van f, de x-as, de y-as en de lijn $x = 1$.
Het vlakdeel W_p wordt ingesloten door de grafiek van f, de x-as en de lijnen $x = 1$ en $x = p$ met $p > 1$.
Het lichaam K ontstaat als V wentelt om de x-as en het lichaam L_p ontstaat als W_p wentelt om de x-as.
De inhoud van L_2 is e^2 keer zo groot als de inhoud van K.

a Bewijs dit.

b Bereken algebraïsch voor welke p de inhoud van L_p tien keer zo groot is als de inhoud van K. Rond af op drie decimalen.

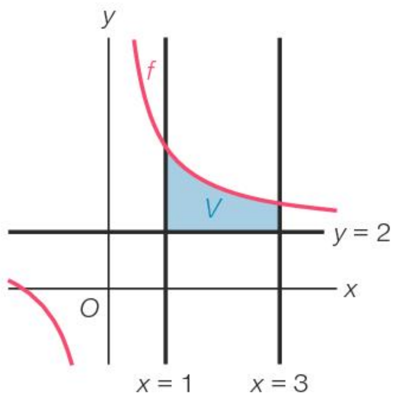


figuur 11.32

52 Het vlakdeel V wordt ingesloten door de grafiek van de functie $f(x) = 2 + \dfrac{3}{x}$ en de lijnen $y = 2$, $x = 1$ en $x = 3$.
Het lichaam L ontstaat door V om de lijn $y = 2$ te wentelen.
Het vlakdeel V wordt 2 omlaag geschoven. Hierdoor ontstaat het vlakdeel W.
Het vlakdeel W wordt ingesloten door de x-as, de lijnen $x = 1$ en $x = 3$ en de grafiek van de functie g.

a Geef het functievoorschrift van g.

b Bereken exact de inhoud van het lichaam M dat ontstaat als W wentelt om de x-as en licht toe dat je hiermee ook de inhoud van L hebt berekend.



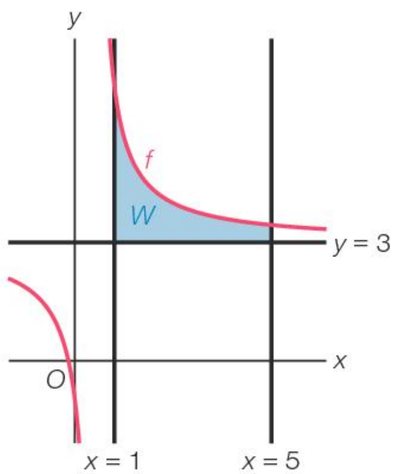
figuur 11.33

A53 Gegeven is de functie $f(x) = 3 + \dfrac{4}{2x - 1}$.

a Bereken exact de oppervlakte van het vlakdeel V dat wordt ingesloten door de grafiek van f, de x-as en de lijnen $x = 1$ en $x = 5$.

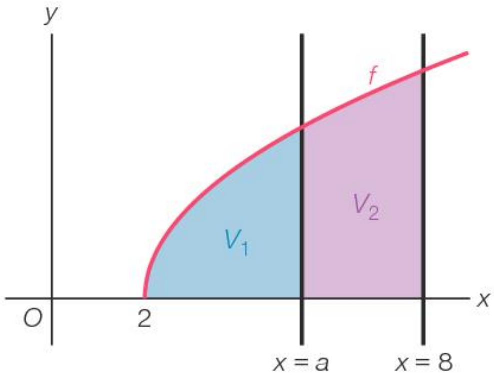
Het vlakdeel W wordt ingesloten door de grafiek van f en de lijnen $x = 1$, $x = 5$ en $y = 3$.

b Bereken exact de inhoud van het lichaam K dat ontstaat als W wentelt om de lijn $y = 3$.



figuur 11.34

A54 Het vlakdeel V wordt ingesloten door de grafiek van de functie $f(x) = \sqrt{x-2}$, de x-as en de lijn $x = 8$. De lijn $x = a$ verdeelt V in de vlakdelen V_1 en V_2. V_1 en V_2 wentelen om de x-as, zo ontstaan de lichamen L_1 en L_2.
Bereken exact voor welke a de inhouden van L_1 en L_2 gelijk zijn.

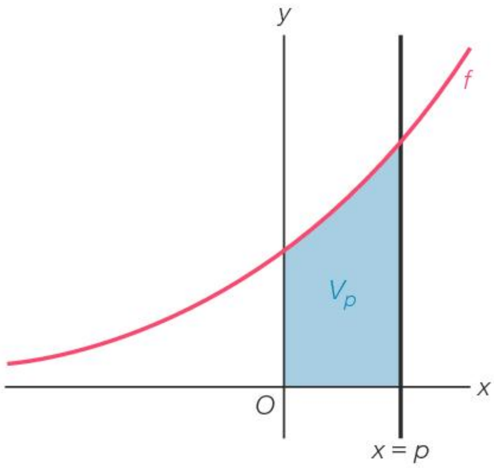


figuur 11.35

A55 Het vlakdeel V_p wordt ingesloten door de grafiek van de functie $f(x) = e^{\frac{1}{2}x+1}$, de x-as, de y-as en de lijn $x = p$ met $p > 0$.

a Bereken p exact in het geval de oppervlakte van V_p gelijk is aan $2e$.

b Het vlakdeel V_p wentelt om de x-as. Zo ontstaat het lichaam L_p.
Bereken exact voor welke waarde van p de inhoud van L_p gelijk is aan $9\pi e^2$.



figuur 11.36

O56 Het vlakdeel V wordt ingesloten door de grafieken van de functies $f(x) = x$ en $g(x) = \frac{1}{2}x$ en de lijnen $x = 1$ en $x = 3$. Het vlakdeel V wentelt om de x-as, zo ontstaat het lichaam L.

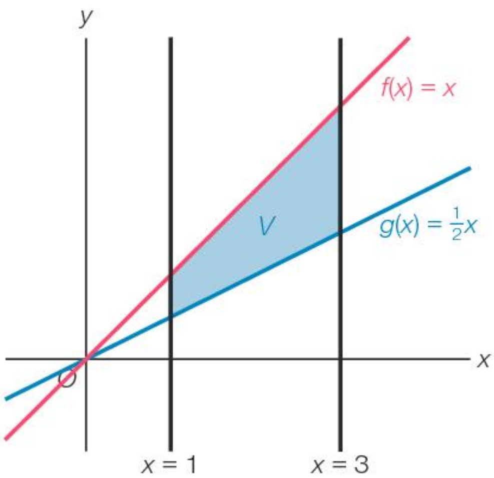
Er geldt $\pi\int_1^3 (f(x))^2\,dx = 8\frac{2}{3}\pi$ en $\pi\int_1^3 (g(x))^2\,dx = 2\frac{1}{6}\pi$.

a Geef de inhoud van L.

Jolien zegt $I(L) = \pi\int_1^3 (f(x) - g(x))^2\,dx$ en

Irma zegt $I(L) = \pi\int_1^3 ((f(x))^2 - (g(x))^2)\,dx$.

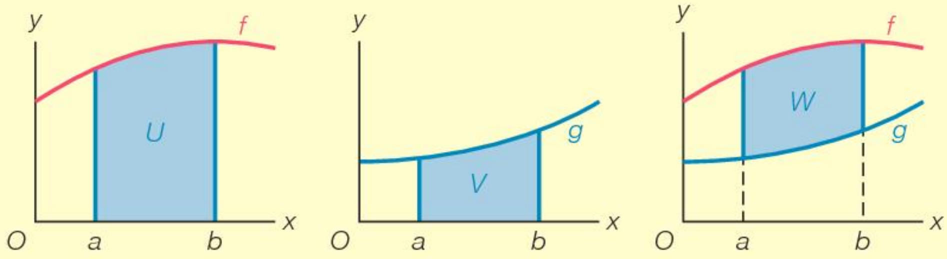
b Onderzoek wie gelijk heeft.



figuur 11.37

Theorie B Vlakdelen wentelen om de *x*-as

In figuur 11.38 zijn de vlakdelen U, V en W getekend.

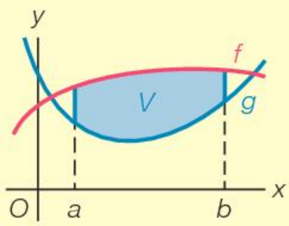


figuur 11.38

Het lichaam L ontstaat als U wentelt om de x-as, het lichaam M ontstaat als V wentelt om de x-as en het lichaam N ontstaat als W wentelt om de x-as.
Om de inhoud van N te berekenen neem je het verschil van de inhouden van L en M, dus

$$I(N) = I(L) - I(M) = \pi\int_a^b (f(x))^2\,\mathrm{d}x - \pi\int_a^b (g(x))^2\,\mathrm{d}x = \pi\int_a^b ((f(x))^2 - (g(x))^2)\,\mathrm{d}x.$$

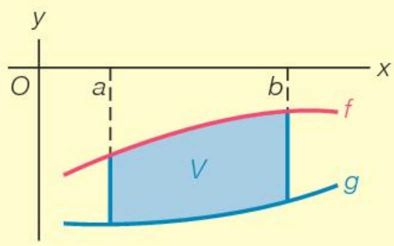
Het vlakdeel V ligt boven de x-as en wordt ingesloten door de grafieken van de functies f en g, waarbij $f(x) \geq g(x)$, en de lijnen $x = a$ en $x = b$ met $a < b$.
De inhoud van het lichaam L dat ontstaat als V wentelt om de x-as is $I(L) = \pi\int_a^b ((f(x))^2 - (g(x))^2)\,\mathrm{d}x$.



De inhoud van het lichaam dat ontstaat als het vlakdeel V in figuur 11.39 wentelt om de x-as is gelijk aan

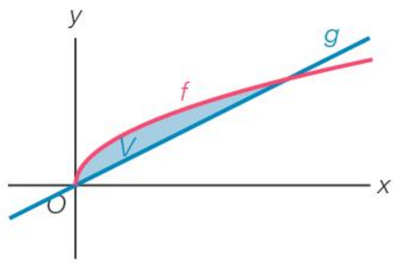
$$\pi\int_a^b ((g(x))^2 - (f(x))^2)\,\mathrm{d}x.$$

Je neemt de 'buitenste' inhoud min de 'binnenste' inhoud.



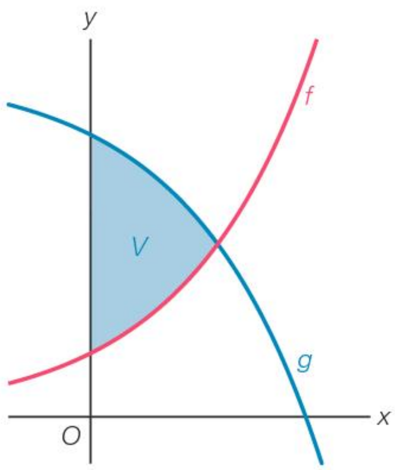
figuur 11.39

57 Het vlakdeel V wordt ingesloten door de grafieken van de functies $f(x) = \sqrt{x}$ en $g(x) = \frac{1}{2}x$.
Bereken exact de inhoud van het lichaam L dat ontstaat als V wentelt om de x-as.



figuur 11.40

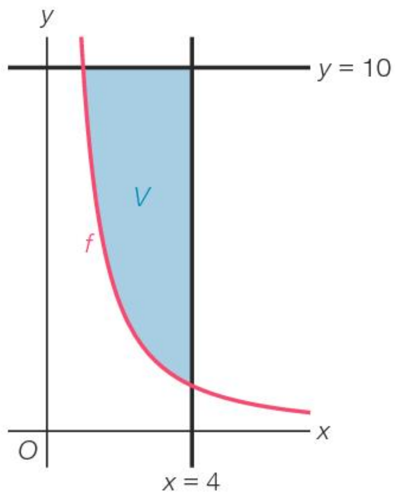
58 Het vlakdeel V wordt ingesloten door de y-as en de grafieken van de functies $f(x) = e^{\frac{1}{2}x}$ en $g(x) = 2e - e^{\frac{1}{2}x}$.
Bereken exact de inhoud van het lichaam L dat ontstaat als V wentelt om de x-as.



figuur 11.41

A59 Gegeven is de functie $f(x) = \dfrac{10}{x\sqrt{x}}$.
Het vlakdeel V wordt ingesloten door de grafiek van f en de lijnen $x = 4$ en $y = 10$. Zie figuur 11.42.

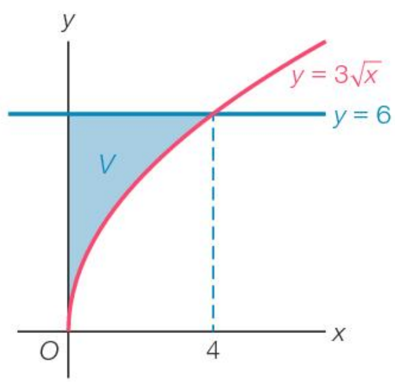
a Bereken exact de oppervlakte van V.
b Bereken exact de inhoud van het lichaam L dat ontstaat als V wentelt om de x-as.



figuur 11.42

O60 In figuur 11.43 wordt het vlakdeel V ingesloten door de grafiek van de functie $f(x) = 3\sqrt{x}$, de y-as en de lijn $y = 6$.
We vragen ons af wat de inhoud is van het lichaam L dat ontstaat als V wentelt om de y-as.
Volgens Sanne kun je de inhoud berekenen door de grafiek van f^{inv} te wentelen om de x-as.

a Laat zien dat $f^{\text{inv}}(x) = \frac{1}{9}x^2$, maak een schets en bereken de integraal die Sanne bedoelt. Welke grenzen heb je gebruikt?



figuur 11.43

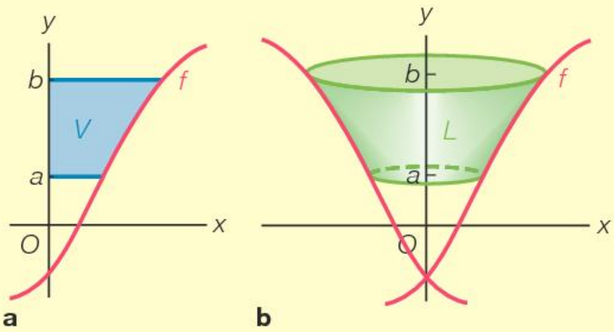
Volgens Jasmijn is het helemaal niet nodig om met de inverse te werken. Je kunt, op soortgelijke manier als bij wentelen om de x-as, gebruiken dat $I(L) = \pi\int_a^b x^2\,dy$.

Je moet dan wel eerst x^2 uitdrukken in y.

b Laat zien dat $x^2 = \frac{1}{81}y^4$.
c Welke grenzen a en b moet Jasmijn gebruiken?
d Laat zien dat het berekenen van de integraal van Jasmijn op hetzelfde neerkomt als het berekenen van de integraal van Sanne.

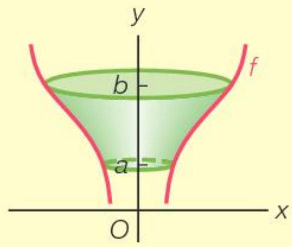
Theorie C Wentelen om de y-as

Het vlakdeel V in figuur 11.44a wentelt om de y-as. Zo ontstaat het lichaam L in figuur 11.44b.
Om de inhoud van L te berekenen, ga je net zo te werk als bij het wentelen om de x-as. Je krijgt dus dat voor de inhoudsfunctie I geldt
$I(y+h) - I(y) \approx \pi \cdot x^2 \cdot h$ en hieruit volgt dat I gelijk is aan $\pi\int_a^b x^2\,\mathrm{d}y$.



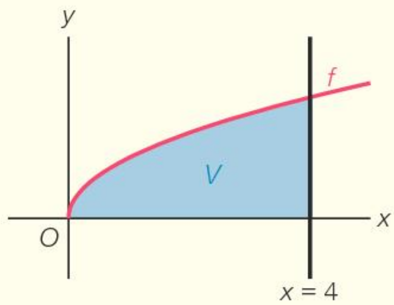
figuur 11.44

Het vlakdeel V ligt rechts van de y-as en wordt ingesloten door de grafiek van de functie f, de y-as en de lijnen $y = a$ en $y = b$ met $a < b$.
De inhoud van het lichaam L dat ontstaat als V om de y-as wentelt is $I(L) = \pi\int_a^b x^2\,\mathrm{d}y$.



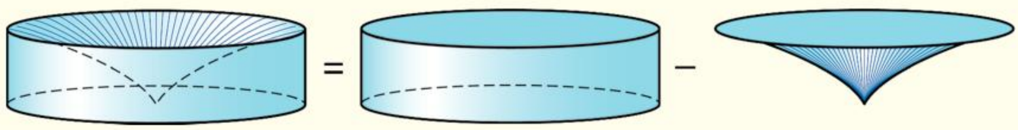
Voorbeeld

Het vlakdeel V wordt ingesloten door de grafiek van de functie $f(x) = \sqrt{x}$, de x-as en de lijn $x = 4$.
Bereken exact de inhoud van het lichaam L dat ontstaat als V wentelt om de y-as.



figuur 11.45

Aanpak
Gebruik dat L een cilinder is waaruit een omwentelingslichaam is weggelaten.



Uitwerking

$I(L) = I(\text{cilinder}) - \pi\int_0^{f(4)} x^2\,\mathrm{d}y$

$y = \sqrt{x}$ geeft $x^2 = y^4$, dus

$I(L) = \pi \cdot 4^2 \cdot 2 - \pi\int_0^2 y^4\,\mathrm{d}y = 32\pi - \pi\left[\frac{1}{5}y^5\right]_0^2 = 32\pi - \pi(\frac{32}{5} - 0) = 25\frac{3}{5}\pi$

R61 Zie het voorbeeld.
Je kunt de inhoud van het lichaam L ook berekenen zonder gebruik te maken van I(cilinder). Je gebruikt dan $I(L) = \pi\int_0^2 (4^2 - x^2)\,\mathrm{d}y$.

a Licht dit toe en laat zien dat je zo ook de juiste inhoud krijgt.

Sanne maakt de berekening door f^{inv} te gebruiken en te wentelen om de x-as.

b Geef de berekening die hierbij hoort.

62 Het vlakdeel V wordt ingesloten door de grafiek van $y = \sqrt{2x - 4}$, de x-as, de y-as en de lijn $y = 3$.

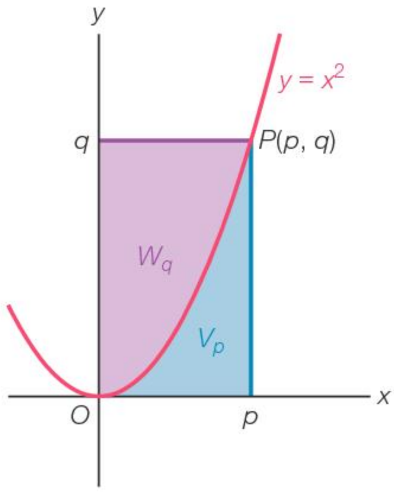
a Bereken exact de inhoud van het lichaam L dat ontstaat als V wentelt om de y-as.

b Bereken exact de inhoud van het lichaam M dat ontstaat als V wentelt om de x-as.

63 Gegeven zijn de parabool $y = x^2$ en het punt $P(p, q)$ op de parabool.
Het vlakdeel V_p wordt ingesloten door de parabool, de x-as en de lijn $x = p$.
Het vlakdeel W_q wordt ingesloten door de parabool, de y-as en de lijn $y = q$.

a Bereken exact de inhoud van het lichaam L dat ontstaat als W_4 om de y-as wentelt.

b Bij wenteling van V_p om de x-as ontstaat het lichaam L_p en bij wenteling van W_q om de y-as ontstaat het lichaam M_q.
Bereken exact voor welke p en q de inhouden van L_p en M_q gelijk zijn.



figuur 11.46

A64 Gegeven is de functie $f(x) = \sqrt{2x + 6}$.
Het vlakdeel V wordt ingesloten door de grafiek van f, de x-as en de y-as.
Bereken exact de inhoud

a van het lichaam L dat ontstaat als V om de x-as wentelt

b van het lichaam M dat ontstaat als V om de y-as wentelt.

Het vlakdeel W wordt ingesloten door de grafiek van f en de lijnen $x = -3$ en $y = 4$.

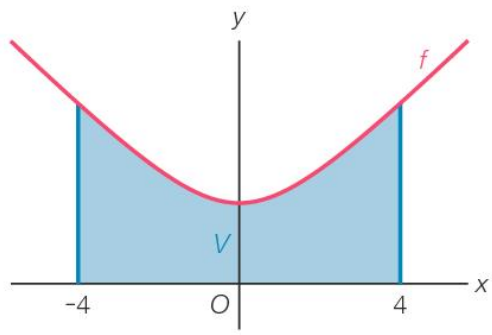
c Bereken exact de inhoud van het lichaam N dat ontstaat als W wentelt om de lijn $x = -3$.

O65

Het vlakdeel V wordt ingesloten door de grafiek van de functie $f(x) = \sqrt{x^2 + 4}$, de x-as en de lijnen $x = -4$ en $x = 4$.

a Bereken exact de inhoud van het lichaam L dat ontstaat als V wentelt om de x-as.

b Welk probleem krijg je als je de oppervlakte van V exact wilt berekenen?



figuur 11.47

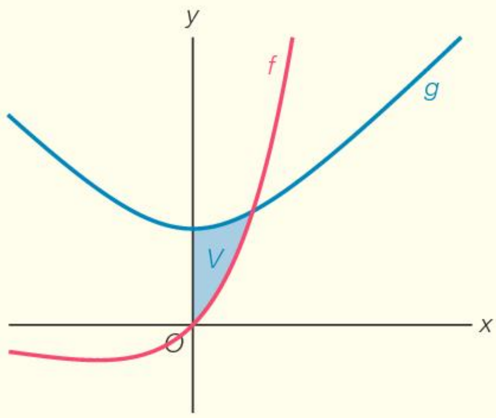
Theorie D Integralen numeriek berekenen

Van sommige functies kun je geen primitieve berekenen. Je berekent dan de integraal met een optie van de GR.

[GR] Neem de module **Integreren** door.

Voorbeeld

Het vlakdeel V wordt ingesloten door de grafieken van de functies $f(x) = x\,\mathrm{e}^x$ en $g(x) = \sqrt{x^2 + 1}$ en de y-as.
Bereken de oppervlakte van V. Rond af op drie decimalen.

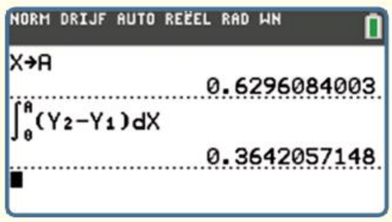


figuur 11.48

Uitwerking

Voer in $y_1 = x\,\mathrm{e}^x$ en $y_2 = \sqrt{x^2 + 1}$.
De optie snijpunt geeft $x = 0{,}6296...$
De optie integraal geeft

$$O(V) = \int_0^{0{,}6296...} (g(x) - f(x))\,\mathrm{d}x \approx 0{,}364.$$



R66

Zie opgave 65.
Bereken de oppervlakte van V. Rond af op twee decimalen.

67

Gegeven is de functie $f(x) = \sqrt{\sin(x)}$ met $D_f = [0, \pi]$.
Het vlakdeel V wordt ingesloten door de grafiek van f en de x-as.
Onderzoek of de lijn $y = \frac{1}{3}x$ het vlakdeel V in twee delen met gelijke oppervlakte verdeelt.

A68

Gegeven is de functie $f(x) = 2\ln(x) - \ln^2(x)$.

a Bereken exact de nulpunten van f.

b Bereken exact de coördinaten van de top van de grafiek van f.

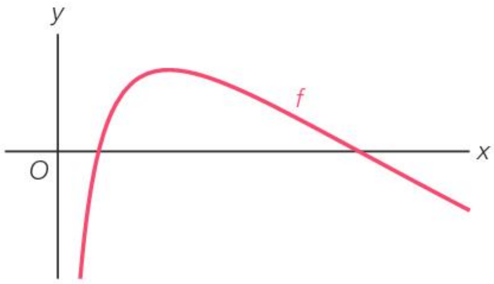
Een primitieve van f is
$F(x) = 4x\ln(x) - x\ln^2(x) - 4x$.

c Bewijs dat deze primitieve juist is.

Het vlakdeel V wordt ingesloten door de grafiek van f en de x-as.

d Bereken exact de oppervlakte van V.

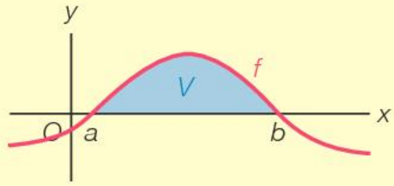
e Bereken de inhoud van het lichaam L dat ontstaat als V om de x-as wentelt. Rond af op drie decimalen.



figuur 11.49

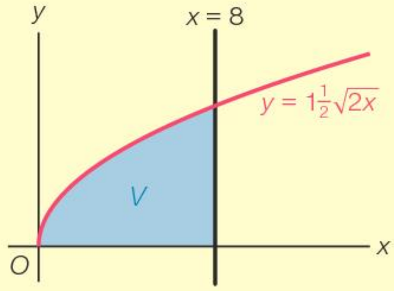
Terugblik

Inhoud van omwentelingslichamen



Door het vlakdeel V in de figuur hiernaast te wentelen om de x-as ontstaat het lichaam L.

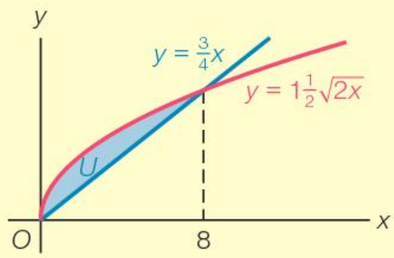
De inhoud van L is $I(L) = \pi\int_a^b (f(x))^2\,\mathrm{d}x$.



Het lichaam K ontstaat door het vlakdeel V, ingesloten door de grafiek van de functie $f(x) = 1\frac{1}{2}\sqrt{2x}$, de x-as en de lijn $x = 8$, te wentelen om de x-as.

$$I(K) = \pi\int_0^8 (1\tfrac{1}{2}\sqrt{2x})^2\,\mathrm{d}x = \pi\int_0^8 4\tfrac{1}{2}x\,\mathrm{d}x = \pi\left[2\tfrac{1}{4}x^2\right]_0^8 = 144\pi$$

Vlakdelen wentelen om de x-as



Door het vlakdeel U in de figuur hiernaast te wentelen om de x-as ontstaat het lichaam M. De inhoud van M is

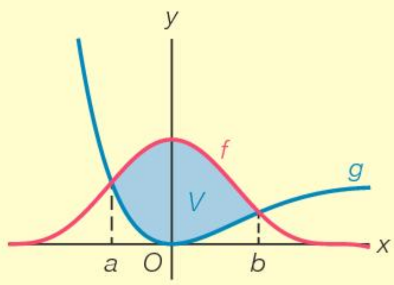
$$I(M) = \pi\int_0^8 ((1\tfrac{1}{2}\sqrt{2x})^2 - (\tfrac{3}{4}x)^2)\,\mathrm{d}x = \pi\int_0^8 (4\tfrac{1}{2}x - \tfrac{9}{16}x^2)\,\mathrm{d}x$$
$$= \pi\left[2\tfrac{1}{4}x^2 - \tfrac{3}{16}x^3\right]_0^8 = 48\pi.$$

Wentelen om de y-as

Door het vlakdeel U hierboven te wentelen om de y-as ontstaat het lichaam N.
$y = \frac{3}{4}x$ geeft $x = 1\frac{1}{3}y$ en $y = 1\frac{1}{2}\sqrt{2x}$ geeft $2x = (\frac{2}{3}y)^2$ oftewel $x = \frac{2}{9}y^2$.
Omdat de snijpunten van de grafieken (0, 0) en (8, 6) zijn, krijg je

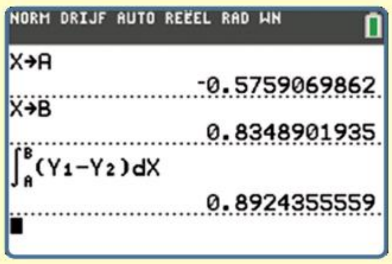
$$I(N) = \pi\int_0^6 ((1\tfrac{1}{3}y)^2 - (\tfrac{2}{9}y^2)^2)\,\mathrm{d}y = \pi\int_0^6 (\tfrac{16}{9}y^2 - \tfrac{4}{81}y^4)\,\mathrm{d}y = \pi\left[\tfrac{16}{27}y^3 - \tfrac{4}{405}y^5\right]_0^6 = 51\tfrac{1}{5}\pi.$$

Integralen numeriek berekenen



In de figuur hiernaast zie je het vlakdeel V dat wordt ingesloten door de grafieken van de functies $f(x) = \cos^3(x)$ en $g(x) = x^2\,\mathrm{e}^{-x}$.
Om de oppervlakte van V te krijgen, bereken je eerst met de optie snijpunt de x-coördinaten van de snijpunten en zet deze in de geheugenplaatsen A en B.
Dit geeft $a = -0{,}5759...$ en $b = 0{,}8348...$
Daarna gebruik je de optie integraal.

Je krijgt $O(V) = \int_a^b (f(x) - g(x))\,\mathrm{d}x \approx 0{,}892$.



11.4 Toepassingen van integralen

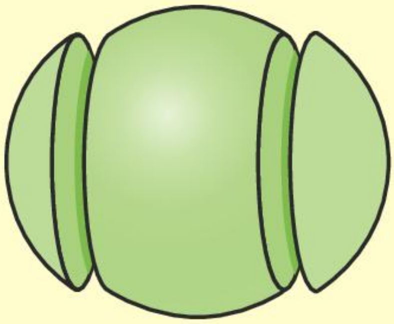
O69 De cirkel met middelpunt O en straal r heeft vergelijking $x^2 + y^2 = r^2$ oftewel $y^2 = r^2 - x^2$. Bij wentelen van deze cirkel om de x-as ontstaat een bol met straal r.
Bewijs met integraalrekening dat de inhoud van deze bol $\frac{4}{3}\pi r^3$ is.

Theorie A Inhoud van bol en kegel

In opgave 69 heb je met integraalrekening bewezen dat de inhoud van een bol met straal r gelijk is aan $\frac{4}{3}\pi r^3$.

Door een bol met een (plat) vlak te snijden, ontstaan twee **bolsegmenten**.
Snijd je een bol met twee evenwijdige vlakken, dan ontstaan twee bolsegmenten en een **bolschijf**. Zie figuur 11.50.

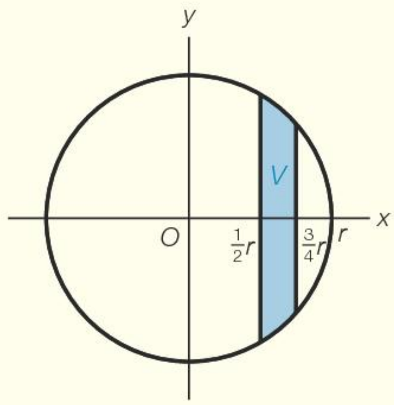
Met behulp van een integraal is een formule voor de inhoud van een bolsegment en van een bolschijf op te stellen.



figuur 11.50

Voorbeeld

Het vlakdeel V wordt ingesloten door de cirkel $x^2 + y^2 = r^2$ en de lijnen $x = \frac{1}{2}r$ en $x = \frac{3}{4}r$.
Stel de formule op van de inhoud van de bolschijf S die ontstaat als V om de x-as wentelt.



figuur 11.51

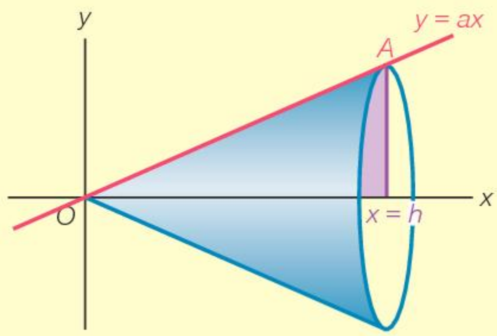
Uitwerking

$$\left.\begin{array}{l} I(S) = \pi \displaystyle\int_{\frac{1}{2}r}^{\frac{3}{4}r} y^2 \, \mathrm{d}x \\ x^2 + y^2 = r^2 \text{, dus } y^2 = r^2 - x^2 \end{array}\right\} I(S) = \pi \int_{\frac{1}{2}r}^{\frac{3}{4}r} (r^2 - x^2)\,\mathrm{d}x = \pi \left[r^2x - \tfrac{1}{3}x^3\right]_{\frac{1}{2}r}^{\frac{3}{4}r}$$

$$= \pi(r^2 \cdot \tfrac{3}{4}r - \tfrac{1}{3} \cdot (\tfrac{3}{4}r)^3 - (r^2 \cdot \tfrac{1}{2}r - \tfrac{1}{3} \cdot (\tfrac{1}{2}r)^3)$$

$$= \pi(\tfrac{3}{4}r^3 - \tfrac{9}{64}r^3 - \tfrac{1}{2}r^3 + \tfrac{1}{24}r^3) = \tfrac{29}{192}\pi r^3$$

In figuur 11.52 zie je dat een kegel een omwentelingslichaam is.
De kegel ontstaat door het vlakdeel V ingesloten door de lijn $y = ax$, de x-as en de lijn $x = h$ om de x-as te wentelen.
Met behulp van integraalrekening is een formule van de inhoud van deze kegel op te stellen.



figuur 11.52

$$I = \pi\int_0^h (ax)^2\,dx = \pi\int_0^h a^2x^2\,dx = \pi\left[\tfrac{1}{3}a^2x^3\right]_0^h = \tfrac{1}{3}\pi a^2h^3$$

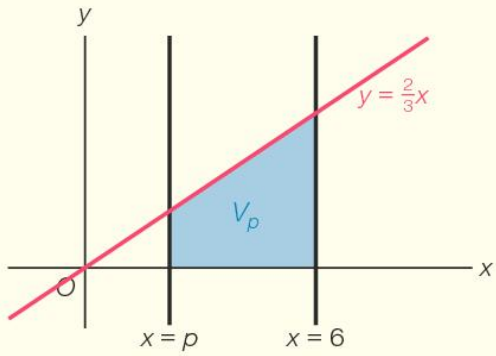
Uit $x_A = h$ volgt $y_A = ah$, dus de straal r van de grondcirkel is ah.

$$\left.\begin{array}{l} I = \tfrac{1}{3}\pi a^2h^3 = \tfrac{1}{3}\pi \cdot a^2h^2 \cdot h \\ r = ah \end{array}\right\} I = \tfrac{1}{3}\pi \cdot r^2 \cdot h$$

Omdat πr^2 de oppervlakte is van het grondvlak G van de kegel, is de formule ook te schrijven als $I = \frac{1}{3}Gh$.

Voorbeeld

Het vlakdeel V_p wordt ingesloten door de lijn $y = \frac{2}{3}x$, de x-as en de lijnen $x = p$ en $x = 6$ met $0 < p < 6$. Door V_p te wentelen om de x-as ontstaat de afgeknotte kegel K_p.
Bereken exact voor welke p de inhoud van K_p gelijk is aan 24π.



figuur 11.53

Uitwerking

$$I_p = \pi\int_p^6 (\tfrac{2}{3}x)^2\,dx = \pi\int_p^6 \tfrac{4}{9}x^2\,dx = \pi\left[\tfrac{4}{27}x^3\right]_p^6$$

$$= \pi(\tfrac{4}{27} \cdot 6^3 - \tfrac{4}{27}p^3) = \pi(32 - \tfrac{4}{27}p^3)$$

$I_p = 24\pi$ geeft $\pi(32 - \frac{4}{27}p^3) = 24\pi$

$$32 - \tfrac{4}{27}p^3 = 24$$
$$-\tfrac{4}{27}p^3 = -8$$
$$p^3 = 54$$
$$p = \sqrt[3]{54}$$

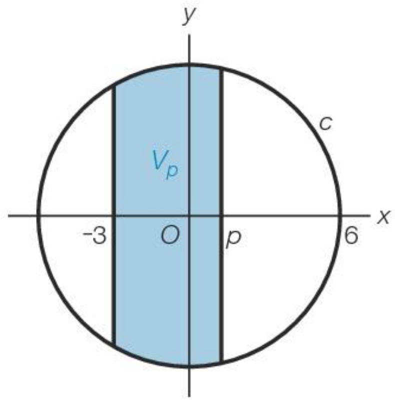
R70

a Zie het voorbeeld op bladzijde 129.
Het vlakdeel W wordt ingesloten door de cirkel en de lijnen $x = \frac{1}{4}r$ en $x = \frac{1}{2}r$. Als W om de x-as wentelt ontstaat de bolschijf T.
Bereken exact hoeveel keer zo groot de inhoud van bolschijf T is als de inhoud van bolschijf S.

b Zie het voorbeeld hierboven.
Bereken p met behulp van de formule van de inhoud van een kegel.

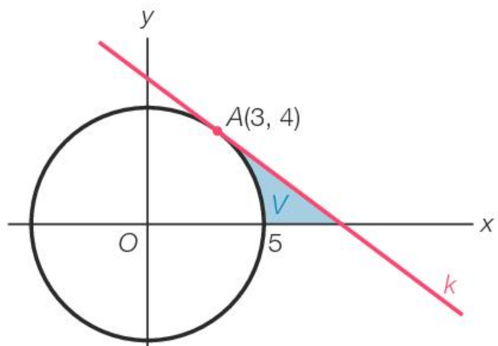
71 Het vlakdeel V ligt rechts van de lijn $x = \frac{1}{3}r$ en wordt ingesloten door de cirkel $x^2 + y^2 = r^2$ en de lijn $x = \frac{1}{3}r$.
Stel de formule op van de inhoud van het bolsegment dat ontstaat als V om de x-as wentelt.

A72 De bol B ontstaat als de cirkel c: $x^2 + y^2 = 36$ wentelt om de x-as.
Het vlakdeel V_p wordt ingesloten door c en de lijnen $x = -3$ en $x = p$ met $p > -3$. Zie figuur 11.54.
De bolschijf S_p ontstaat als V_p om de x-as wentelt.
Stel de formule op van de inhoud van S_p en bereken hiermee voor welke p de inhoud van S_p gelijk is aan de helft van de inhoud van B. Rond af op twee decimalen.



figuur 11.54

A73 Het vlakdeel V wordt ingesloten door de cirkel c: $x^2 + y^2 = 25$, de x-as en de lijn k die de cirkel raakt in het punt $A(3, 4)$. Zie figuur 11.55.
Door V te wentelen om de x-as ontstaat het lichaam L.
Bereken exact de inhoud van L.



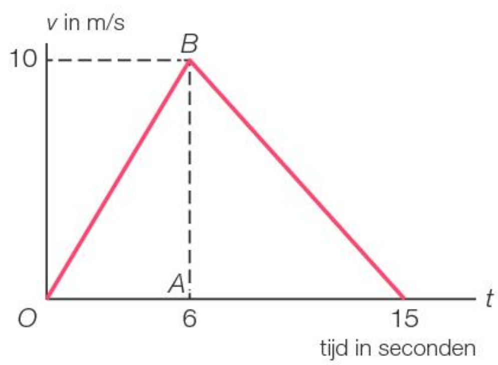
figuur 11.55

O74 In figuur 11.56 is van een voorwerp de snelheid v in m/s uitgezet tegen de tijd t in seconden.

a Bereken de gemiddelde snelheid gedurende de eerste zes seconden. Hoeveel meter wordt gedurende deze zes seconden afgelegd?

b Licht toe: de oppervlakte van driehoek OAB geeft de afgelegde afstand gedurende de eerste zes seconden.

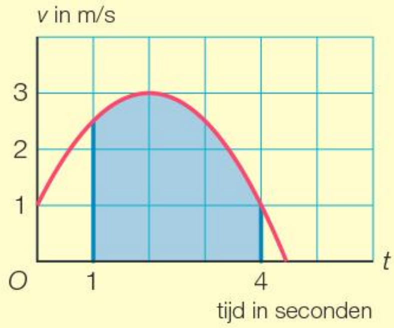
c Bereken de afgelegde afstand op het interval [0, 15].



figuur 11.56

Theorie B Afgelegde afstand, snelheid en versnelling

Bij een tijd-afstandformule is de formule van de snelheid v de afgeleide van s. Dus $s'(t) = v(t)$.
Hieruit volgt dat s een primitieve is van v en dat de afgelegde afstand gedurende een tijdsinterval gelijk is aan de bijbehorende oppervlakte onder de grafiek van v.
In figuur 11.57 is van een voorwerp de snelheid v in m/s uitgezet tegen de tijd t in seconden.



figuur 11.57

Met de integraal $\int_1^4 v(t)\,\mathrm{d}t$ bereken je de afgelegde afstand op het interval [1, 4].
Is gegeven dat $v(t) = -\frac{1}{2}t^2 + 2t + 1$, dan krijg je

$$\int_1^4 (-\tfrac{1}{2}t^2 + 2t + 1)\,\mathrm{d}t = \left[-\tfrac{1}{6}t^3 + t^2 + t\right]_1^4 =$$
$$(-\tfrac{1}{6} \cdot 4^3 + 4^2 + 4) - (-\tfrac{1}{6} \cdot 1^3 + 1^2 + 1) = 7\tfrac{1}{2}.$$

Dus de afgelegde afstand is $7\frac{1}{2}$ meter.

Bij de formule $v(t) = -\frac{1}{2}t^2 + 2t + 1$ hoort de formule van de afgelegde afstand $s(t) = -\frac{1}{6}t^3 + t^2 + t + c$.
Is bijvoorbeeld gegeven dat $s(1) = 5$, dan is hiermee c te berekenen.

Merk op dat je voor het berekenen van de afgelegde afstand op een tijdsinterval de integratieconstante c niet hoeft te weten. Voor het berekenen van de afgelegde afstand op een tijdsinterval kun je dus ook $c = 0$ nemen.

Is de formule van de snelheid v van een voorwerp bekend, dan krijg je de formule van de versnelling a door de afgeleide van v te nemen. Dus $a(t) = v'(t) = s''(t)$. Hieruit volgt dat v een primitieve is van a en dat de toename van de snelheid gedurende een tijdsinterval gelijk is aan de bijbehorende oppervlakte onder de grafiek van a.

Is gegeven $a(t) = t + \mathrm{e}^t$ met t in seconden en a in m/s^2, dan is $v(t) = \frac{1}{2}t^2 + \mathrm{e}^t + c_1$. Is verder gegeven dat $v(0) = 0$, dan is $0 + 1 + c_1 = 0$, dus $c_1 = -1$, zodat de formule van de snelheid wordt $v(t) = \frac{1}{2}t^2 + \mathrm{e}^t - 1$.
Primitiveren hiervan geeft de formule van de afgelegde afstand, dus $s(t) = \frac{1}{6}t^3 + \mathrm{e}^t - t + c_2$.
Met het extra gegeven dat $s(0) = 0$ krijg je $0 + 1 - 0 + c_2 = 0$, dus $c_2 = -1$.
Dus de formule van de afgelegde afstand is $s(t) = \frac{1}{6}t^3 + \mathrm{e}^t - t - 1$.
De afgelegde afstand gedurende de vijfde seconde is te berekenen met $s(5) - s(4) = \frac{1}{6} \cdot 5^3 + \mathrm{e}^5 - 5 - 1 - (\frac{1}{6} \cdot 4^3 + \mathrm{e}^4 - 4 - 1) \approx 102{,}98$ meter.

Voorbeeld

Een voorwerp met een snelheid van 4 m/s ondergaat vanaf $t = 0$ gedurende 10 seconden een versnelling. De versnelling neemt tussen $t = 0$ en $t = 10$ lineair af van 5 m/s^2 tot 0 m/s^2.
Bereken exact hoeveel meter gedurende deze 10 seconden wordt afgelegd.

Uitwerking
Stel $a(t) = mt + n$.

$$m = \frac{a(10) - a(0)}{10 - 0} = \frac{0 - 5}{10} = -\tfrac{1}{2}$$

$a(t) = -\frac{1}{2}t + n$ en $a(0) = 5$ geeft $a(t) = -\frac{1}{2}t + 5$

$a(t) = -\frac{1}{2}t + 5$ en $v(0) = 4$ geeft $v(t) = -\frac{1}{4}t^2 + 5t + 4$

$v(t) = -\frac{1}{4}t^2 + 5t + 4$ en $s(0) = 0$ geeft $s(t) = -\frac{1}{12}t^3 + 2\frac{1}{2}t^2 + 4t$

De afgelegde afstand gedurende deze 10 seconden is
$s(10) = -\frac{1}{12} \cdot 10^3 + 2\frac{1}{2} \cdot 10^2 + 4 \cdot 10 = 206\frac{2}{3}$ meter.

R75 In het voorbeeld is genomen $s(0) = 0$.
Krijg je een ander antwoord als je een andere waarde voor $s(0)$ neemt? Licht toe.

76 Een voorwerp met een snelheid van 1 m/s ondergaat vanaf $t = 0$ gedurende 20 seconden een versnelling. De versnelling neemt tussen $t = 0$ en $t = 20$ lineair toe van 0 m/s^2 tot 5 m/s^2.
Bereken exact hoeveel meter gedurende deze 20 seconden wordt afgelegd.

77 Een voorwerp in rust ondergaat vanaf $t = 0$ gedurende 6 seconden een versnelling die gegeven is door $a(t) = -t^2 + 6t$. Hierin is a in m/s^2 en t in seconden met $0 \leq t \leq 6$.

a Bereken algebraïsch de snelheid op $t = 6$.
b Bereken algebraïsch de afgelegde afstand gedurende deze 6 seconden.

Na $t = 6$ verandert de snelheid niet meer.

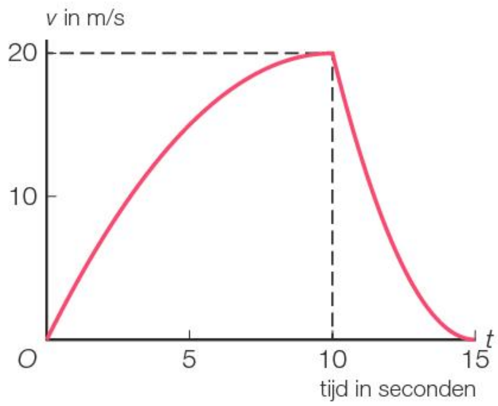
c Bereken algebraïsch hoeveel meter in totaal is afgelegd op $t = 10$.
d Bereken voor welke t in totaal 500 meter is afgelegd.

78 Bij een botsproef rijdt een auto met een snelheid van 54 km/uur tegen een betonblok. Door de kreukelzone van de auto en het gebruik van de veiligheidsgordel en een airbag is de remweg van de bestuurder 75 cm.
Neem aan dat tijdens de botsing de versnelling constant is.

a Bereken algebraïsch hoe lang de botsing duurt.
b Bereken in m/s^2 de versnelling tijdens de botsing. Hoeveel keer zo groot als de versnelling van de zwaartekracht g is dit? Neem $g = 10$ m/s^2.

79

In figuur 11.58 is de snelheid van een auto in m/s uitgezet tegen de tijd in seconden. Gedurende de eerste 10 seconden trekt de auto op vanuit stilstand. Bij dit gedeelte van de grafiek hoort de formule $v(t) = -0{,}2t^2 + 4t$. Vanaf $t = 10$ remt de auto af. De auto komt tot stilstand op $t = 15$. Bij het tweede gedeelte van de grafiek hoort de formule $v(t) = 0{,}8t^2 - 24t + 180$.



figuur 11.58

a Bereken algebraïsch de totale afstand die de auto gedurende deze 15 seconden aflegt.

b Met behulp van het antwoord van vraag a is de gemiddelde snelheid van de auto gedurende de 15 seconden te berekenen.
Er zijn twee tijdstippen waarop de snelheid van de auto gelijk is aan deze gemiddelde snelheid.
Bereken deze tijdstippen. Rond af op twee decimalen.

c Bereken na hoeveel seconden de auto 100 meter heeft afgelegd. Geef het antwoord in één decimaal.

A80

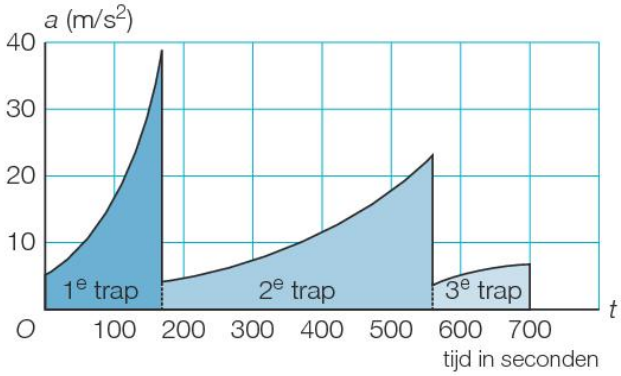
Een parachutiste opent op 800 meter hoogte haar parachute. Daardoor ondergaat zij een versnelling (vertraging) die gegeven wordt door de formule $a(t) = -4\,\mathrm{e}^{-0{,}1t}$. Hierin is t de tijd in seconden met $t = 0$ op het moment dat de parachute wordt geopend en a de versnelling in m/s^2.
Op $t = 3$ is haar snelheid 32 m/s.

a Bereken de snelheid van de parachutiste op het moment dat de parachute wordt geopend.

b Met welke snelheid komt de parachutiste op de grond?

A81 *

De Saturnus V-raket die de Apollo naar de maan bracht, bestond uit drie trappen.
De eerste trap had een hoogte van 42 meter, een diameter van 10 meter en een stuwkracht van maar liefst 35 miljoen newton.
Van de tweede trap was de hoogte 25 meter en was de stuwkracht 5,2 miljoen newton.
Deze twee trappen gaven de Apollo een enorme versnelling. Zie figuur 11.59.



figuur 11.59

De eerste trap werkt 170 seconden en wordt dan elke seconde 12 000 kg lichter. De formule die bij de versnelling gedurende deze 170 seconden hoort is $a(t) = 5\,e^{0{,}012t}$ met t in seconden en a in m/s^2.
De tweede trap werkt tussen $t = 170$ en $t = 560$. De formule die bij dit gedeelte van de grafiek hoort is $a(t) = 4\,e^{0{,}0045(t-170)}$.

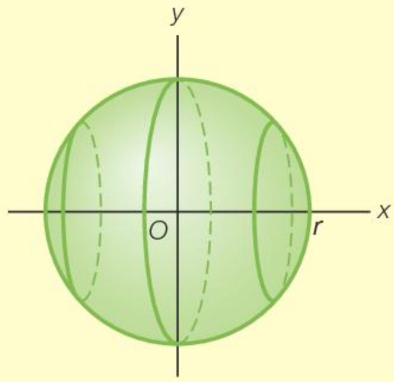
a Bereken in km/uur de snelheid van de Apollo na 170 seconden. Hoeveel kilometer heeft de Apollo dan afgelegd?

b Bereken de snelheid en de afgelegde afstand van de Apollo op $t = 560$.

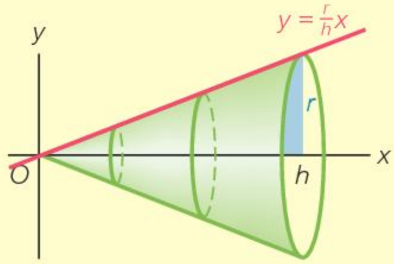
Terugblik

Inhoud van bol en kegel

Door de cirkel $x^2 + y^2 = r^2$ te wentelen om de x-as ontstaat een bol met straal r.
Met integraalrekening is bewezen dat de inhoud van de bol gelijk is aan $\frac{4}{3}\pi r^3$.
Door het vlakdeel ingesloten door de cirkel, de y-as en de lijn $x = \frac{2}{3}r$ te wentelen om de x-as ontstaat een bolschijf.
De inhoud van deze bolschijf is



$$\pi\int_0^{\frac{2}{3}r} y^2\,\mathrm{d}x = \pi\int_0^{\frac{2}{3}r} (r^2 - x^2)\,\mathrm{d}x = \pi\left[r^2x - \tfrac{1}{3}x^3\right]_0^{\frac{2}{3}r} = \tfrac{46}{81}\pi r^3.$$



Door het vlakdeel ingesloten door de lijn $y = \dfrac{r}{h}x$, de x-as en de lijn $x = h$ te wentelen om de x-as ontstaat een kegel met straal grondcirkel r en hoogte h. De formule van de inhoud van deze kegel krijg je met een integraal.

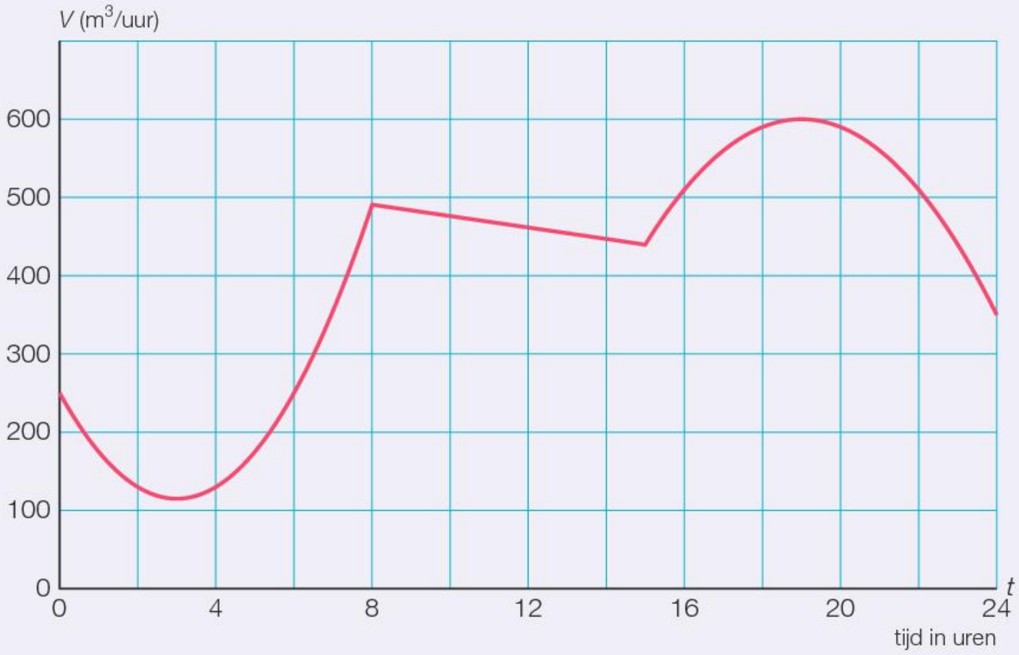
$$\pi\int_0^h \left(\frac{r}{h}x\right)^2 \mathrm{d}x = \pi\int_0^h \frac{r^2}{h^2}x^2\,\mathrm{d}x = \pi\left[\frac{r^2}{h^2}\cdot\tfrac{1}{3}x^3\right]_0^h = \pi\left(\frac{r^2}{h^2}\cdot\tfrac{1}{3}h^3 - 0\right) = \tfrac{1}{3}\pi r^2 h$$

Afstand, snelheid en versnelling

Voor de afgelegde afstand s, de snelheid v en de versnelling a geldt $a(t) = v'(t) = s''(t)$.
Dus v is een primitieve van a en s is een primitieve van v.
Is gegeven $a(t) = 5\,\mathrm{e}^{0,1t}$, dan krijg je $v(t) = 50\,\mathrm{e}^{0,1t} + c_1$.
Is verder gegeven dat $v(0) = 10$, dan is $50\,\mathrm{e}^0 + c_1 = 10$, dus $c_1 = -40$.
$v(t) = 50\,\mathrm{e}^{0,1t} - 40$ geeft $s(t) = 500\,\mathrm{e}^{0,1t} - 40t + c_2$
Is $s(0) = 0$ dan geldt $500\,\mathrm{e}^0 - 0 + c_2 = 0$, dus $c_2 = -500$.
Dit geeft $s(t) = 500\,\mathrm{e}^{0,1t} - 40t - 500$.

Eindopdracht Drinkwater in landelijk gebied

De figuur hieronder gaat over het drinkwater dat het bedrijf Vitens op een dag in een landelijk gebied met 34 232 inwoners gedurende die dag aan zijn klanten heeft geleverd.



Je ziet dat de volumestroom V (in m^3/uur) tussen 8 en 15 uur vrijwel lineair verloopt. Tussen 0 en 8 uur is het verloop van de volumestroom te benaderen door een tweedegraadsformule. Dit is ook het geval tussen 15 en 24 uur.

Met de gegevens in de tabel hiernaast kun je een formule opstellen van het lineaire verband tussen 8 en 15 uur, en van de kwadratische verbanden die gelden tussen 0 en 8 uur en tussen 15 en 24 uur.
In de tabel is t de tijd in uren met $t = 0$ om 0 uur en is V de volumestroom in m^3/uur. Neem ook in de formules de tijd t in uren met $t = 0$ om 0 uur.

- Stel deze formules op en bereken hiermee op algebraïsche wijze hoeveel liter drinkwater per persoon Vitens deze dag in dit gebied heeft geleverd.

t	V
0	250
3	115 (minimum)
8	490
15	440
19	600 (maximum)
24	350

Diagnostische toets

11.1 Primitieven en integralen

1 Toon aan.

a $F(x) = x^3\,e^x$ is een primitieve van $f(x) = (x^3 + 3x^2)\,e^x$.

b $G(x) = \frac{1}{2}x^2 - x + 2\ln(x+1)$ is een primitieve van $g(x) = \dfrac{x^2+1}{x+1}$.

2 Primitiveer.

a $f(x) = \dfrac{2x+6}{x^2}$

b $f(x) = 3 \cdot 2^x$

c $f(x) = 6\,e^x + x^2$

d $f(x) = \ln(x^5)$

e $f(x) = {}^2\log(4x)$

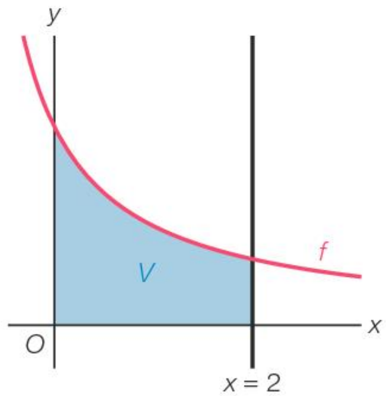
f $f(x) = 3\sin(x) + 2\cos(x)$

3 Gegeven is de functie $f(x) = 4x - \ln(x)$.
De grafiek van een primitieve van f gaat door het punt $(1, 7)$.
Bereken deze primitieve.

4 Het vlakdeel V wordt ingesloten door de grafiek van de functie $f(x) = \dfrac{2}{x+1}$, de x-as, de y-as en de lijn $x = 2$.

a Bereken algebraïsch de oppervlakte van V.

b De lijn $x = p$ verdeelt V in twee delen met gelijke oppervlakte.
Bereken exact de waarde van p.



figuur 11.60

11.2 Oppervlakten

5 Bereken de primitieven.

a $f(x) = (2x+6)^5 + \dfrac{10}{(3x-1)^2}$

b $f(x) = (5x+2)^2 \cdot \sqrt{5x+2}$

c $f(x) = 4\,e^{2x+3}$

d $f(x) = 8 \cdot 2^{2x-1}$

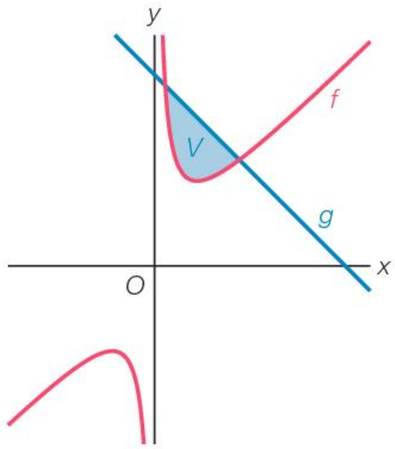
e $f(x) = \ln(2x+3)$

f $f(x) = \dfrac{6}{2x+5}$

6 Gegeven zijn de functies $f(x) = \dfrac{x^2+4}{x}$ en $g(x) = -x + 9$.

a Het vlakdeel V wordt ingesloten door de grafieken van f en g.
Bereken exact de oppervlakte van V.

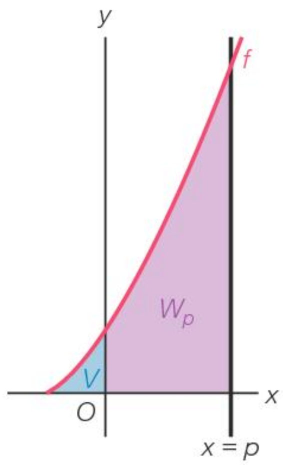
b Het vlakdeel W wordt ingesloten door de grafiek van f en de lijnen $x = 1$, $x = p$ met $p > 1$ en $y = x$.
Bereken exact voor welke waarde van p de oppervlakte van W gelijk is aan 3.



figuur 11.61

11.3 Inhouden

7 Gegeven is de functie $f(x) = (2x + 1)\sqrt{2x + 1}$.
Het vlakdeel V wordt ingesloten door de grafiek van f, de x-as en de y-as. Het vlakdeel W_p wordt ingesloten door de grafiek van f, de x-as, de y-as en de lijn $x = p$ met $p > 0$.
Het lichaam K ontstaat als V wentelt om de x-as, het lichaam L_p ontstaat als W_p wentelt om de x-as. De inhoud van L_p is 624 keer zo groot als de inhoud van K.
Bereken algebraïsch de waarde van p.



figuur 11.62

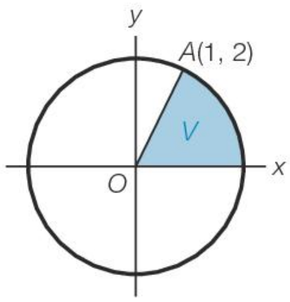
8 Gegeven is de functie $f(x) = (2x - 6)^2$.
Het vlakdeel V wordt ingesloten door de grafiek van f, de x-as en de y-as.
Bereken exact de inhoud van het lichaam L dat ontstaat als V wentelt om de y-as.

9 Gegeven is de functie $f(x) = e^x$. V is het vlakdeel dat wordt ingesloten door de grafiek van f, de x-as, de y-as en de lijn $x = 1$.
Bereken algebraïsch de inhoud L van het lichaam dat ontstaat als V wentelt om de lijn $y = e$. Rond af op twee decimalen.

10 Gegeven is de functie $f(x) = x^2 \sin(x)$ met $D_f = [0, \pi]$.
Bereken de oppervlakte van het vlakdeel V dat wordt ingesloten door de grafiek van f en de x-as. Rond af op drie decimalen.

11.4 Toepassingen van integralen

11 Gegeven is de cirkel $x^2 + y^2 = 5$. Op de cirkel ligt het punt $A(1, 2)$. Het vlakdeel V wordt ingesloten door het lijnstuk OA, de cirkel en de x-as.
Bereken algebraïsch de inhoud van het lichaam L dat ontstaat als V wentelt om de x-as. Rond af op twee decimalen.



figuur 11.63

12 Een raket wordt verticaal gelanceerd. Omdat door verbranding van de brandstof de massa van de raket voortdurend afneemt, wordt de versnelling bij gelijkblijvende stuwkracht steeds groter. Neem aan dat de versnelling gedurende de eerste 60 seconden na de lancering gelijkmatig toeneemt van 8 m/s^2 tot 68 m/s^2.
a Bereken exact welke hoogte de raket bereikt in deze 60 seconden.

Op $t = 60$ wordt de raketmotor uitgeschakeld. Vanaf dat moment werkt alleen de zwaartekracht van de aarde op de raket. Neem aan dat de raket geen wrijving ondervindt en dat g = 10 m/s^2.
b Bereken exact de maximale hoogte van de raket.

12

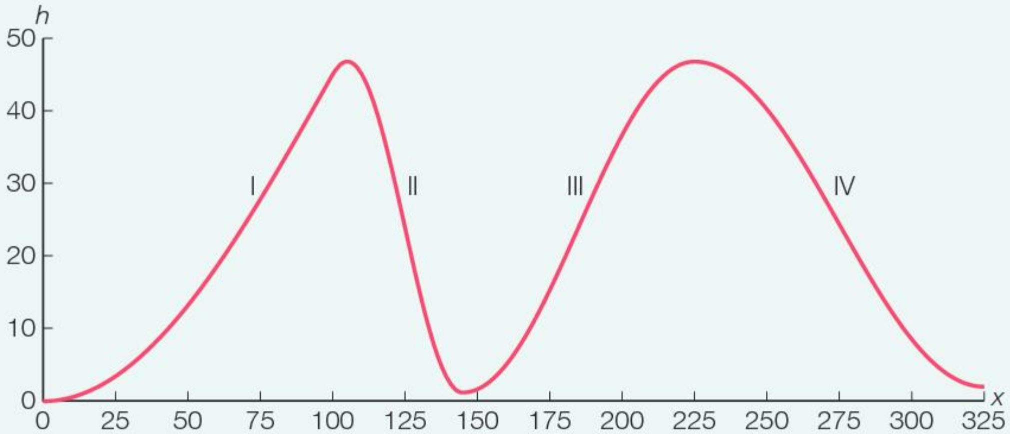
Goniometrische formules

Wat leer je?

- Goniometrische formules gebruiken bij het oplossen van goniometrische vergelijkingen, bij herleidingen, bij het aantonen van symmetrie en bij primitiveren.
- Werken met bewegingsvergelijkingen bij eenparige cirkelbewegingen.
- De begrippen trillingstijd en frequentie hanteren bij harmonische trillingen.
- Berekenen van lengten, hoeken en snelheden bij bewegingsvergelijkingen met goniometrische functies.
- Rekenen aan banen van meebewegende punten.

Beginopdracht Een achtbaan

In de figuur hieronder is in een assenstelsel het eerste gedeelte van een achtbaan getekend. Dit gedeelte is opgebouwd uit vier stukken, die elk kunnen worden beschreven met een formule van de vorm $h = a + b\sin(c(x - d))$. Hierin zijn x en h in meters.



Voor stuk I geldt de formule $h = 45 + 45\sin(0{,}005\pi(x - 100))$ met $0 \leq x \leq 100$. De formule van II geldt voor $100 \leq x \leq 145$.
Dit stuk sluit bij $x = 100$ zonder knik aan bij I, dus voor $x = 100$ zijn zowel de functiewaarden als de afgeleiden aan elkaar gelijk. Verder gaat II dalend door de evenwichtsstand in het punt (125, 24).
Uit deze gegevens volgt dat $a = 24$, $b = -22{,}8$, $c = 0{,}079$ en $d = 125$.
Hierbij is b afgerond op één decimaal en c op drie decimalen.

- Laat met berekeningen zien hoe je aan de waarden van b en c kunt komen.
- Voor welke waarde van x wordt door II de grootste hoogte bereikt? Rond af op gehelen.

Afgerond op gehelen wordt de kleinste hoogte van II bereikt voor $x = 145$. We nemen aan dat de kleinste hoogte, dus een hoogte van 1,2 meter, wordt bereikt voor precies $x = 145$.
De formule van III geldt voor $145 \leq x \leq 225$. Dit stuk sluit bij $x = 145$ zonder knik aan bij II en bereikt voor $x = 225$ de grootste hoogte, waar de baan horizontaal is. Deze hoogte is gelijk aan de grootste hoogte van II.

- Stel de formule op van h voor $145 \leq x \leq 225$.

Stuk IV sluit bij $x = 225$ zonder knik aan bij III en daalt in 100 meter naar het laagste punt, waar de baan weer horizontaal is. Het laagste punt van IV ligt op een hoogte van 2 meter.

- Stel de formule op die bij IV hoort.
- Bij II is de maximale helling groter dan bij IV. Bereken hoeveel keer zo groot.

Voorkennis Goniometrische formules herleiden

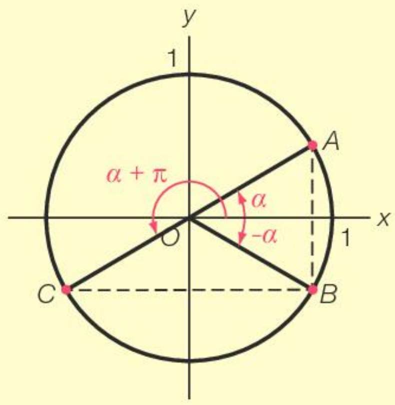
Theorie A Formules aantonen met de eenheidscirkel

In figuur 12.1 zie je de eenheidscirkel met het punt A waarvan de draaiingshoek α is.
De draaiingshoek van het punt B is $-\alpha$ en de draaiingshoek van het punt C is $\alpha + \pi$.
Omdat $y_B = -y_A$ is $\sin(-\alpha) = -\sin(\alpha)$
$x_B = x_A$ is $\cos(-\alpha) = \cos(\alpha)$
$y_C = -y_A$ is $\sin(\alpha + \pi) = -\sin(\alpha)$
$x_C = -x_A$ is $\cos(\alpha + \pi) = -\cos(\alpha)$.
Je hebt geleerd dat deze formules worden genoteerd als

$\sin(-A) = -\sin(A)$ $\quad$ $-\sin(A) = \sin(A + \pi)$
$\cos(-A) = \cos(A)$ $\quad$ $-\cos(A) = \cos(A + \pi)$.

Hiermee geven we aan dat je voor A elke uitdrukking kunt invullen. Zo is bijvoorbeeld

$-\sin(x - \frac{1}{3}\pi) = \sin(-x + \frac{1}{3}\pi)$ en ook $\quad$ $-\sin(A) = \sin(-A)$
$-\sin(x - \frac{1}{3}\pi) = \sin(x + \frac{2}{3}\pi)$. $\quad$ $-\sin(A) = \sin(A + \pi)$



figuur 12.1
$x_A = \cos(\alpha)$ en $y_A = \sin(\alpha)$

1 **a** Toon de volgende formules aan met de eenheidscirkel en noteer deze formules met de letter A.
$\sin(\alpha + \frac{1}{2}\pi) = \cos(\alpha)$
$\cos(\alpha + \frac{1}{2}\pi) = -\sin(\alpha)$
b De formule $\sin(A) = -\cos(A + \frac{1}{2}\pi)$ is ook te noteren als $\sin(A) = \cos(A - \frac{1}{2}\pi)$.
Toon dit aan.

2 Gebruik de eenheidscirkel om y uit te drukken in $\sin(\alpha)$ of $\cos(\alpha)$.

a $y = \sin(\alpha - \frac{1}{2}\pi)$
b $y = \cos(\alpha - \frac{1}{2}\pi)$
c $y = \sin(\alpha + 1\frac{1}{2}\pi)$
d $y = \cos(\alpha + 1\frac{1}{2}\pi)$
e $y = \sin(\frac{1}{2}\pi - \alpha)$
f $y = \cos(\frac{1}{2}\pi - \alpha)$
g $y = \sin(1\frac{1}{2}\pi - \alpha)$
h $y = \cos(1\frac{1}{2}\pi - \alpha)$

Theorie B Formules herleiden

De formule $y = -\cos(x + \frac{1}{4}\pi)$ is te herleiden tot een formule van de vorm $y = \sin(x + a)$.

Stap 1 Zorg dat je de min kwijt raakt.
Gebruik de formule $-\cos(A) = \cos(A + \pi)$.
Je krijgt $-\cos(x + \frac{1}{4}\pi) = \cos(x + 1\frac{1}{4}\pi)$.

Stap 2 Maak van de cosinus een sinus.
Gebruik de formule $\cos(A) = \sin(A + \frac{1}{2}\pi)$.
Je krijgt $\cos(x + 1\frac{1}{4}\pi) = \sin(x + 1\frac{3}{4}\pi)$.

De formule $y = -\cos(x + \frac{1}{4}\pi)$ is dus te herleiden tot de formule $y = \sin(x + 1\frac{3}{4}\pi)$.

Omdat geldt dat $\sin(A + 2\pi) = \sin(A)$, kun je ook schrijven $\sin(x + 1\frac{3}{4}\pi) = \sin(x - \frac{1}{4}\pi)$.
Hiermee is $y = -\cos(x + \frac{1}{4}\pi)$ herleid tot $y = \sin(x - \frac{1}{4}\pi)$.
Je kunt ook de stappen 1 en 2 verwisselen. Ga na dat je dan hetzelfde resultaat krijgt.

3 **a** Herleid de formule $y = \sin(2x - \frac{1}{3}\pi)$ tot een formule van de vorm $y = \cos(ax + b)$.
b Herleid de formule $y = -\sin(3x - \frac{1}{4}\pi)$ tot een formule van de vorm $y = \cos(ax + b)$.
c Herleid de formule $y = \cos(\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\pi)$ tot een formule van de vorm $y = \sin(ax + b)$.
d Herleid de formule $y = -\cos(2(x - \frac{1}{6}\pi))$ tot een formule van de vorm $y = \sin(ax + b)$.

$\sin(A) = \cos(A - \frac{1}{2}\pi)$
$\cos(A) = \sin(A + \frac{1}{2}\pi)$

12.1 Goniometrische formules bij vergelijkingen en herleidingen

01

Gegeven is de vergelijking $\sin(2x) + \sin(x) = 0$.
Met de formule $-\sin(A) = \sin(A + \pi)$ is de vergelijking te herleiden tot $\sin(2x) = \sin(x + \pi)$.

a Licht dit toe.

Gegeven is de vergelijking $2\sin^2(x) = 3\cos(x)$.
Met de formule $\sin^2(A) + \cos^2(A) = 1$ is de vergelijking te herleiden tot $2\cos^2(x) + 3\cos(x) - 2 = 0$.

b Licht dit toe.

Theorie A Goniometrische vergelijkingen

Je kent de volgende formules.

$\sin(-A) = -\sin(A)$ $-\sin(A) = \sin(A + \pi)$ $\sin(A) = \cos(A - \frac{1}{2}\pi)$	$\cos(-A) = \cos(A)$ $-\cos(A) = \cos(A + \pi)$ $\cos(A) = \sin(A + \frac{1}{2}\pi)$	$\sin^2(A) + \cos^2(A) = 1$ $\tan(A) = \dfrac{\sin(A)}{\cos(A)}$

Deze formules gebruik je soms bij het oplossen van vergelijkingen. Zo is de vergelijking $\sin(2x) + \sin(x) = 0$ met behulp van de formule $-\sin(A) = \sin(A + \pi)$ te herleiden tot $\sin(2x) = \sin(x + \pi)$. Daarna kun je een algemene regel voor het oplossen van goniometrische vergelijkingen gebruiken.

$\sin(A) = \sin(B)$ geeft $A = B + k \cdot 2\pi \vee A = \pi - B + k \cdot 2\pi$
$\cos(A) = \cos(B)$ geeft $A = B + k \cdot 2\pi \vee A = -B + k \cdot 2\pi$
$\tan(A) = \tan(B)$ geeft $A = B + k \cdot \pi$

Bij het algebraïsch oplossen van de vergelijking $2\sin^2(x) = 3\cos(x)$ gebruik je de formule $\sin^2(A) + \cos^2(A) = 1$ om $2\sin^2(x)$ uit te drukken in $\cos(x)$.
Uit $\sin^2(A) + \cos^2(A) = 1$ volgt $\sin^2(A) = 1 - \cos^2(A)$.
Dus $2\sin^2(x) = 2(1 - \cos^2(x)) = 2 - 2\cos^2(x)$.
Zie verder het voorbeeld op de volgende bladzijde.

Voorbeeld

Los exact op.

a $2\sin^2(x) = 3\cos(x)$

b $\sin(3x) = \sqrt{3} \cdot \cos(3x)$

Uitwerking

a $2\sin^2(x) = 3\cos(x)$

$2(1 - \cos^2(x)) = 3\cos(x)$

$2 - 2\cos^2(x) = 3\cos(x)$

$2\cos^2(x) + 3\cos(x) - 2 = 0$

Stel $\cos(x) = u$.

$2u^2 + 3u - 2 = 0$

$D = 3^2 - 4 \cdot 2 \cdot -2 = 25$

$u = \dfrac{-3 + 5}{4} = \frac{1}{2} \vee u = \dfrac{-3 - 5}{4} = -2$

$\cos(x) = \frac{1}{2} \vee \cos(x) = -2$

$x = \frac{1}{3}\pi + k \cdot 2\pi \vee x = -\frac{1}{3}\pi + k \cdot 2\pi$

b $\sin(3x) = \sqrt{3} \cdot \cos(3x)$

$\dfrac{\sin(3x)}{\cos(3x)} = \sqrt{3}$

$\tan(3x) = \sqrt{3}$

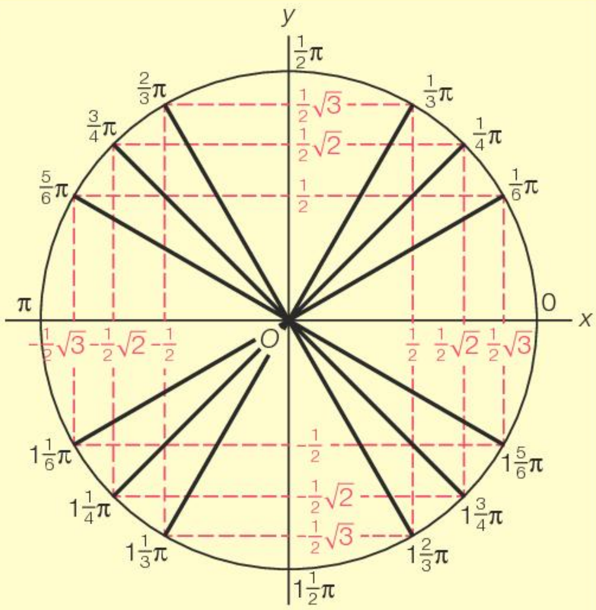
$3x = \frac{1}{3}\pi + k \cdot \pi$

$x = \frac{1}{9}\pi + k \cdot \frac{1}{3}\pi$

In voorbeeld a is gebruikgemaakt van het volgende.

De vergelijkingen $\sin(A) = C$ en $\cos(A) = C$ met $C = -\frac{1}{2}\sqrt{3}, -\frac{1}{2}\sqrt{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\sqrt{2}, \frac{1}{2}\sqrt{3}$ los je op door uit de exacte-waarden-cirkel één oplossing B af te lezen.
Daarna gebruik je

- $\sin(A) = C$ geeft
  $A = B + k \cdot 2\pi \vee A = \pi - B + k \cdot 2\pi$
- $\cos(A) = C$ geeft
  $A = B + k \cdot 2\pi \vee A = -B + k \cdot 2\pi$.



figuur 12.2 De exacte-waarden-cirkel.

In het voorbeeld op de volgende bladzijde wordt de vergelijking $\sin(2x - \frac{1}{3}\pi) = -\cos(x + \frac{1}{3}\pi)$ eerst herleid tot de vorm $\sin(A) = \sin(B)$.

Voorbeeld

Bereken exact de oplossingen in $[0, 2\pi]$ van $\sin(2x - \frac{1}{3}\pi) = -\cos(x + \frac{1}{3}\pi)$.

Uitwerking

$\sin(2x - \frac{1}{3}\pi) = -\cos(x + \frac{1}{3}\pi)$ — $-\cos(A) = \cos(A + \pi)$

$\sin(2x - \frac{1}{3}\pi) = \cos(x + 1\frac{1}{3}\pi)$ — $\cos(A) = \sin(A + \frac{1}{2}\pi)$

$\sin(2x - \frac{1}{3}\pi) = \sin(x + 1\frac{5}{6}\pi)$

$2x - \frac{1}{3}\pi = x + 1\frac{5}{6}\pi + k \cdot 2\pi \vee 2x - \frac{1}{3}\pi = \pi - (x + 1\frac{5}{6}\pi) + k \cdot 2\pi$

$x = 2\frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi \vee 2x - \frac{1}{3}\pi = \pi - x - 1\frac{5}{6}\pi + k \cdot 2\pi$

$x = 2\frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi \vee 3x = -\frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi$

$x = 2\frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi \vee x = -\frac{1}{6}\pi + k \cdot \frac{2}{3}\pi$

x in $[0, 2\pi]$ geeft $x = \frac{1}{6}\pi \vee x = \frac{1}{2}\pi \vee x = 1\frac{1}{6}\pi \vee x = 1\frac{5}{6}\pi$

R2 Zie het voorbeeld hierboven.
Los de vergelijking $\sin(2x - \frac{1}{3}\pi) = -\cos(x + \frac{1}{3}\pi)$ op door deze te herleiden tot de vorm $\cos(A) = \cos(B)$.

3 Bereken exact de oplossingen in $[0, 2\pi]$.

- **a** $\sin(x + \frac{1}{2}\pi) = \cos(2x)$
- **b** $\sin(3x) = -\cos(x)$
- **c** $\sin^2(x) + \frac{1}{2}\cos(x) = 1$
- **d** $\sin(\frac{1}{2}x) + \sqrt{3} \cdot \cos(\frac{1}{2}x) = 0$

4 Bereken algebraïsch de oplossingen in $[0, 3]$.

- **a** $\cos(2\pi t) = \sin(\frac{1}{2}\pi t)$
- **b** $\sin(\frac{1}{6}\pi t) = -\cos(\pi t)$

A5 Bereken exact de oplossingen

- **a** in $[0, 2\pi]$ van $2\sin^2(x) + \cos^2(x) + \cos(x) = 0$
- **b** in $[0, 2\pi]$ van $\sin(2x - \frac{1}{3}\pi) = -\cos(\frac{1}{2}x)$
- **c** in $[0, 10]$ van $\cos(\frac{1}{4}\pi t) = -\sin(\frac{2}{5}\pi t)$
- **d** in $[0, 10]$ van $\cos(\frac{1}{3}\pi x) = \sqrt{3} \cdot \sin(\frac{1}{3}\pi x)$.

R6 Welke van de volgende vergelijkingen zijn algebraïsch op te lossen? Geef bij deze vergelijkingen de eerste stap van de uitwerking.

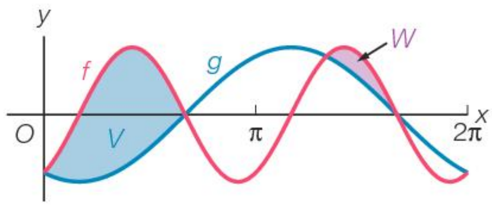
- **a** $2\sin(x) = \sin(x)$
- **b** $\sin(2x) = \sin(x)$
- **c** $2\sin(x) = \cos(x)$
- **d** $2\sin(x) = \sin(x + \frac{1}{3}\pi)$
- **e** $\sin(2x) = \sin(x + \frac{1}{3}\pi)$
- **f** $5\sin(x) = \sin(5x)$

Niet elke goniometrische vergelijking is algebraïsch op te lossen.
Grafisch-numeriek oplossen kan altijd.

7 Gegeven zijn de functies $f(x) = \sin(x)$ en $g(x) = {}^-\cos(2x)$, beide met domein $[0, 2\pi]$.

a Schets de grafieken van f en g in één figuur.
b Bereken exact de oplossingen van $f(x) = {}^-\frac{1}{2}\sqrt{2}$.
c Bereken exact de oplossingen van $g(x) = \frac{1}{2}$.
d Los exact op $f(x) \leq g(x)$.

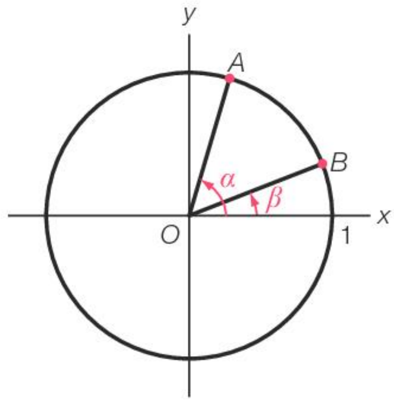
A8 Gegeven zijn de functies $f(x) = \sin(2x - \frac{1}{3}\pi)$ en $g(x) = {}^-\cos(x - \frac{1}{6}\pi)$, beide met domein $[0, 2\pi]$.
De vlakdelen V en W worden ingesloten door de grafieken van f en g. Zie de figuur hiernaast.
Bereken exact hoeveel keer zo groot de oppervlakte is van het vlakdeel V als de oppervlakte van het vlakdeel W.



figuur 12.3

A9 Zie opgave 8.
De lijn $y = \frac{1}{2}$ verdeelt het vlakdeel V in twee delen.
Bereken exact de oppervlakte van het kleinste van deze delen.

O10 Zie figuur 12.4 met de eenheidscirkel, het punt A met draaiingshoek α en het punt B met draaiingshoek β.
Gebruik de regel $\cos(\angle(\vec{a}, \vec{b})) = \dfrac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$ om te bewijzen dat $\cos(\alpha - \beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) + \sin(\alpha)\sin(\beta)$.



figuur 12.4

Theorie B Verschil-, som- en verdubbelingsformules

In opgave 10 heb je bewezen dat
$\cos(\alpha - \beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) + \sin(\alpha)\sin(\beta)$.
Dit noteren we als volgt:
$\cos(t - u) = \cos(t)\cos(u) + \sin(t)\sin(u)$.
Dit is een van de **verschilformules**.
Voor t en u kun je elke uitdrukking invullen.

Verschilformules
$\cos(t - u) = \cos(t)\cos(u) + \sin(t)\sin(u)$
$\sin(t - u) = \sin(t)\cos(u) - \cos(t)\sin(u)$

In opgave 11 leid je beide **somformules** en de verschilformule van de sinus af.

Somformules
$\cos(t + u) = \cos(t)\cos(u) - \sin(t)\sin(u)$
$\sin(t + u) = \sin(t)\cos(u) + \cos(t)\sin(u)$

Uit de somformules volgen de vier **verdubbelingsformules**. Deze leid je af in opgave 12.

Verdubbelingsformules
$\sin(2A) = 2\sin(A)\cos(A)$
$\cos(2A) = \cos^2(A) - \sin^2(A)$
$\cos(2A) = 2\cos^2(A) - 1$
$\cos(2A) = 1 - 2\sin^2(A)$

De verdubbelingsformules staan evenals de som- en verschilformules op het voorblad van het Centraal Examen.

De verdubbelingsformules heb je soms nodig bij het oplossen van goniometrische vergelijkingen.

Bij de vergelijking $4\sin(x)\cos(x) = \sqrt{3}$ gebruik je dat $2\sin(x)\cos(x) = \sin(2x)$.
Dit geeft $2\sin(2x) = \sqrt{3}$.
Dus $\sin(2x) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$, enzovoort.

Bij de vergelijking $\sin^2(2x) = \cos(4x) + 2$ gebruik je $2\sin^2(2x) = 1 - \cos(4x)$.
Dit geeft $\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(4x) = \cos(4x) + 2$
$-1\frac{1}{2}\cos(4x) = 1\frac{1}{2}$
enzovoort.

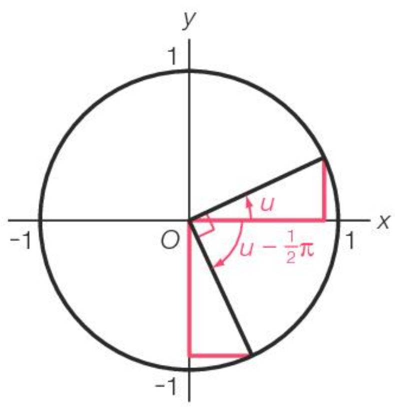
$\cos(2A) = 1 - 2\sin^2(A)$
$2\sin^2(A) = 1 - \cos(2A)$
dus
$2\sin^2(2x) = 1 - \cos(4x)$

11

a Leid de somformule voor de cosinus af uit de verschilformule voor de cosinus door u te vervangen door $-u$.

b Leid de somformule voor de sinus af uit de somformule voor de cosinus door u te vervangen door $u - \frac{1}{2}\pi$ en te gebruiken dat $\sin(u - \frac{1}{2}\pi) = -\cos(u)$.

c Leid de verschilformule voor de sinus af uit de somformule voor de sinus.



figuur 12.5

12 **a** Leid de eerste twee verdubbelingsformules af uit de somformules door te nemen $t = A$ en $u = A$.

b Leid de andere twee verdubbelingsformules af door $\cos(2A) = \cos^2(A) - \sin^2(A)$ te herleiden.

$\cos^2(A) + \sin^2(A) = 1$, dus
$\cos^2(A) = 1 - \sin^2(A)$ en
$\sin^2(A) = 1 - \cos^2(A)$.

13 **a** Herleid de formule $\cos(2A) = 2\cos^2(A) - 1$ tot $\cos^2(A) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2A)$.

b Herleid de formule $\cos(2A) = 1 - 2\sin^2(A)$ tot $\sin^2(A) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2A)$.

14 Bewijs.

a $\sin(x - \frac{1}{4}\pi) = \frac{1}{2}\sqrt{2}(\sin(x) - \cos(x))$

b $\sin(\frac{1}{12}\pi) = \frac{1}{4}(\sqrt{6} - \sqrt{2})$

c $\sin(x + \frac{1}{4}\pi) = \frac{1}{2}\sqrt{2}(\sin(x) + \cos(x))$

d $\sin(\frac{7}{12}\pi) = \frac{1}{4}(\sqrt{6} + \sqrt{2})$

15 **a** Bewijs dat $\cos(\frac{1}{12}\pi) = \frac{1}{4}\sqrt{6} + \frac{1}{4}\sqrt{2}$.

b Bewijs dat $\sin(\frac{1}{8}\pi) = \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\sqrt{2}}$.

16 Herleid tot de vorm $\sin(ax)$ of $\cos(ax)$.

a $\cos(4x)\cos(x) + \sin(4x)\sin(x)$

b $\sin(1\frac{1}{2}x)\cos(x) - \cos(1\frac{1}{2}x)\sin(x)$

c $\cos(\frac{3}{4}x)\cos(1\frac{1}{4}x) - \sin(\frac{3}{4}x)\sin(1\frac{1}{4}x)$

d $\sin(1\frac{1}{3}x)\cos(1\frac{2}{3}x) + \cos(1\frac{1}{3}x)\sin(1\frac{2}{3}x)$

17 Herleid $\sin(x)(\sin(4x) - \sin(2x)) + \cos(x)(\cos(4x) + \cos(2x))$ tot de vorm $a\cos(bx)$.

18 Bereken exact de oplossingen.

a $2\sin(x)\cos(x) = \sin(x - 1)$

b $\cos^2(2x) = \cos(4x) + \frac{1}{2}$

c $\sin^2(\frac{1}{2}x) = \cos(x) + 1\frac{1}{4}$

d $(\sin(x) + \cos(x))^2 = 1\frac{1}{2}$

19 De grafiek van $y = \sin^2(x) + \cos(2x)$ is een sinusoïde.

a Schets de grafiek en stel hierbij een formule op van de vorm $y = a + b\cos(cx)$.

b Bewijs dat de in a opgestelde formule juist is door de formule $y = \sin^2(x) + \cos(2x)$ te herleiden.

20 Bewijs dat $\sin(3x) = 3\sin(x) - 4\sin^3(x)$. Gebruik $\sin(3x) = \sin(2x + x)$ en de somformule voor de sinus.

A21

a Herleid de formule $y = 1 - \cos(x) - \sin^2(\frac{1}{2}x)$ tot de vorm $y = a + b\cos(cx)$.

b Bewijs dat $\cos(3x) = 4\cos^3(x) - 3\cos(x)$.

R22

Om bij $-\sin(2x)$ het minteken voor de sinus weg te werken, kun je de formule $-\sin(A) = \sin(A + \pi)$ gebruiken.
Je krijgt $-\sin(2x) = \sin(2x + \pi)$.
Welke formule kun je gebruiken om

a bij $-\cos(2x)$ het minteken weg te werken

b $\sin(2x)$ om te zetten in een vorm waarin geen sinus meer voorkomt

c bij $\sin^2(2x)$ het kwadraat weg te werken

d bij $\cos^2(3x)$ het kwadraat weg te werken

e $\cos(4x)$ om te zetten in een vorm met een sinus?

GESCHIEDENIS

Ptolemaeus

Claudius Ptolemaeus (85-165) werd geboren in Egypte. Het belangrijkste werk van Ptolemaeus is de Almagest, het grootste astronomische meesterwerk uit de oudheid. De Almagest heeft zijn actualiteit nooit verloren. Hij bevat veel goniometrische formules. Enkele voorbeelden hiervan zijn de formules $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$ en
$\sin(x + y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y)$.
Een aantal formules uit de Almagest is door Ptolemaeus zelf ontwikkeld. Opvallend is overigens dat de formule $\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$ pas in het jaar 980 voor het eerst opduikt in het werk van de Arabier Abu-I-Wafa.
Andere bekende geschriften van Ptolemaeus zijn Planisphaericum en Geographia waarin hij bijvoorbeeld de geografische begrippen lengte en breedte heeft beschreven.
Ptolemaeus overleed in 165 in Alexandrië.

Terugblik

Herleiden en oplossen

Staat een goniometrische vergelijking niet in de vorm $\sin(A) = \sin(B)$ of $\cos(A) = \cos(B)$, dan kun je soms met goniometrische formules de vergelijking tot zo'n vorm herleiden.
Bij het exact oplossen van de vergelijking $\sin(4x) = -\cos(x)$ gebruik je de formules $\cos(A) = \sin(A + \frac{1}{2}\pi)$ en $-\sin(A) = \sin(A + \pi)$.
Je krijgt $\sin(4x) = -\cos(x)$

$$\sin(4x) = -\sin(x + \tfrac{1}{2}\pi)$$
$$\sin(4x) = \sin(x + 1\tfrac{1}{2}\pi)$$
$$4x = x + 1\tfrac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi \vee 4x = \pi - x - 1\tfrac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi$$
$$3x = 1\tfrac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi \vee 5x = -\tfrac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi$$
$$x = \tfrac{1}{2}\pi + k \cdot \tfrac{2}{3}\pi \vee x = -\tfrac{1}{10}\pi + k \cdot \tfrac{2}{5}\pi$$

Je kunt ook toewerken naar $\cos(A) = \cos(B)$.
Je krijgt $\sin(4x) = -\cos(x)$

$$\cos(4x - \tfrac{1}{2}\pi) = \cos(x + \pi)$$
$$4x - \tfrac{1}{2}\pi = x + \pi + k \cdot 2\pi \vee 4x - \tfrac{1}{2}\pi = -x - \pi + k \cdot 2\pi$$
$$3x = 1\tfrac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi \vee 5x = -\tfrac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi$$
$$x = \tfrac{1}{2}\pi + k \cdot \tfrac{2}{3}\pi \vee x = -\tfrac{1}{10}\pi + k \cdot \tfrac{2}{5}\pi$$

Formules en herleiden

Som- en verschilformules	**Verdubbelingsformules**
$\cos(t + u) = \cos(t)\cos(u) - \sin(t)\sin(u)$	$\sin(2A) = 2\sin(A)\cos(A)$
$\sin(t + u) = \sin(t)\cos(u) + \cos(t)\sin(u)$	$\cos(2A) = \cos^2(A) - \sin^2(A)$
$\cos(t - u) = \cos(t)\cos(u) + \sin(t)\sin(u)$	$\cos(2A) = 2\cos^2(A) - 1$
$\sin(t - u) = \sin(t)\cos(u) - \cos(t)\sin(u)$	$\cos(2A) = 1 - 2\sin^2(A)$

Deze formules kun je gebruiken om goniometrische formules te herleiden en goniometrische vergelijkingen op te lossen.
Zo is $y = \cos(2x) - 3\sin^2(x)$ te herleiden tot de vorm $y = a + b\cos(cx)$.

$$y = \cos(2x) - 3\sin^2(x)$$
$$= \cos(2x) - 3(\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\cos(2x))$$
$$= \cos(2x) - 1\tfrac{1}{2} + 1\tfrac{1}{2}\cos(2x)$$
$$= -1\tfrac{1}{2} + 2\tfrac{1}{2}\cos(2x)$$

$\cos(2A) = 1 - 2\sin^2(A)$
$2\sin^2(A) = 1 - \cos(2A)$
$\sin^2(A) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2A)$

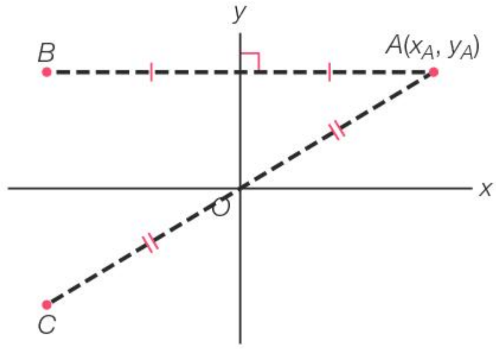
De vergelijking $\cos(2x) = 2\sin^2(x)$ is op te lossen door $2\sin^2(x)$ te vervangen door $1 - \cos(2x)$.
Je krijgt $\cos(2x) = 1 - \cos(2x)$

$$2\cos(2x) = 1$$
$$\cos(2x) = \tfrac{1}{2}$$
$$2x = \tfrac{1}{3}\pi + k \cdot 2\pi \vee 2x = -\tfrac{1}{3}\pi + k \cdot 2\pi$$
$$x = \tfrac{1}{6}\pi + k \cdot \pi \vee x = -\tfrac{1}{6}\pi + k \cdot \pi$$

12.2 Goniometrische formules bij symmetrie en primitiveren

O23

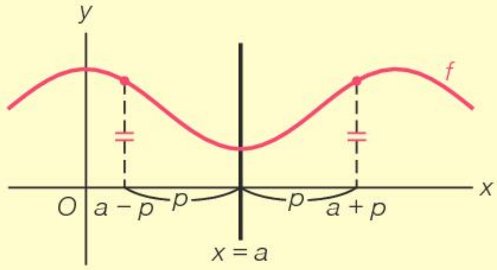
Gegeven is het punt $A(x_A, y_A)$.
Door A te spiegelen in de y-as krijg je het punt B en door A te spiegelen in de oorsprong krijg je het punt C.
Druk de coördinaten van B en C uit in x_A en y_A.



figuur 12.6

Theorie A Lijn- en puntsymmetrie

De grafiek van de functie f in de figuur hiernaast is **lijnsymmetrisch** in de lijn $x = a$. Dat wil zeggen dat voor elke p geldt $f(a - p) = f(a + p)$.
We gaan er hierbij vanuit dat $a - p$ en $a + p$ tot het domein van f behoren.

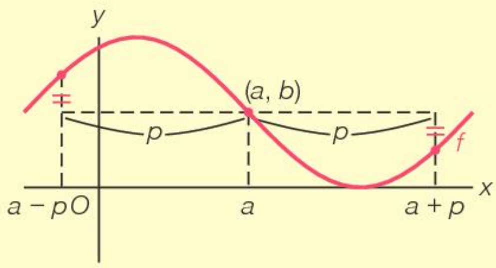


figuur 12.7

De grafiek van een functie f is lijnsymmetrisch in de lijn $x = a$ als voor elke p geldt $f(a - p) = f(a + p)$.

Een bijzonder geval van lijnsymmetrie is symmetrie in de y-as, oftewel symmetrie in de lijn $x = 0$.
Dan geldt voor elke p dat $f(-p) = f(p)$.

De grafiek van de functie f in de figuur hiernaast is **puntsymmetrisch** in het punt (a, b). Dat wil zeggen dat voor elke p geldt
$f(a - p) - b = b - f(a + p)$ oftewel
$f(a - p) + f(a + p) = 2b$.
We gaan er hierbij vanuit dat $a - p$ en $a + p$ tot het domein van f behoren.



figuur 12.8

De grafiek van een functie f is puntsymmetrisch in het punt (a, b) als voor elke p geldt $f(a - p) + f(a + p) = 2b$.

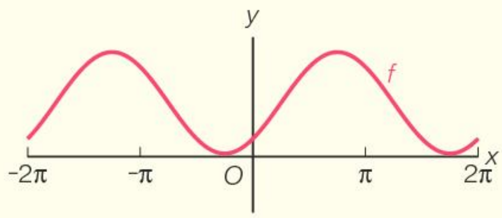
Een bijzonder geval van puntsymmetrie is puntsymmetrie in O.
Dan geldt voor elke p dat $f(-p) + f(p) = 0$.

Voorbeeld

Gegeven is de functie $f(x) = \sin(x) - \cos(x) + 1\frac{1}{2}$.

a Bewijs dat de grafiek van f symmetrisch is in de lijn $x = \frac{3}{4}\pi$.

b Bewijs dat de grafiek van f symmetrisch is in het punt $A(\frac{1}{4}\pi, 1\frac{1}{2})$.



figuur 12.9

Uitwerking

a $f(\frac{3}{4}\pi - p) = \sin(\frac{3}{4}\pi - p) - \cos(\frac{3}{4}\pi - p) + 1\frac{1}{2}$

$= \sin(\frac{3}{4}\pi)\cos(p) - \cos(\frac{3}{4}\pi)\sin(p) - (\cos(\frac{3}{4}\pi)\cos(p) + \sin(\frac{3}{4}\pi)\sin(p)) + 1\frac{1}{2}$

$= \frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot \cos(p) - -\frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot \sin(p) - (-\frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot \cos(p) + \frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot \sin(p)) + 1\frac{1}{2}$

$= \frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot \cos(p) + \frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot \sin(p) + \frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot \cos(p) - \frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot \sin(p) + 1\frac{1}{2}$

$= \sqrt{2} \cdot \cos(p) + 1\frac{1}{2}$

$f(\frac{3}{4}\pi + p) = \sin(\frac{3}{4}\pi + p) - \cos(\frac{3}{4}\pi + p) + 1\frac{1}{2}$

$= \sin(\frac{3}{4}\pi)\cos(p) + \cos(\frac{3}{4}\pi)\sin(p) - (\cos(\frac{3}{4}\pi)\cos(p) - \sin(\frac{3}{4}\pi)\sin(p)) + 1\frac{1}{2}$

$= \frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot \cos(p) - \frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot \sin(p) - (-\frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot \cos(p) - \frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot \sin(p)) + 1\frac{1}{2}$

$= \frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot \cos(p) - \frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot \sin(p) + \frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot \cos(p) + \frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot \sin(p) + 1\frac{1}{2}$

$= \sqrt{2} \cdot \cos(p) + 1\frac{1}{2}$

Er geldt $f(\frac{3}{4}\pi - p) = f(\frac{3}{4}\pi + p)$, dus de grafiek van f is symmetrisch in de lijn $x = \frac{3}{4}\pi$.

b $f(\frac{1}{4}\pi - p) + f(\frac{1}{4}\pi + p)$

$= \sin(\frac{1}{4}\pi - p) - \cos(\frac{1}{4}\pi - p) + 1\frac{1}{2} + \sin(\frac{1}{4}\pi + p) - \cos(\frac{1}{4}\pi + p) + 1\frac{1}{2}$

$= \sin(\frac{1}{4}\pi)\cos(p) - \cos(\frac{1}{4}\pi)\sin(p) - (\cos(\frac{1}{4}\pi)\cos(p) + \sin(\frac{1}{4}\pi)\sin(p)) + 1\frac{1}{2}$

$+ \sin(\frac{1}{4}\pi)\cos(p) + \cos(\frac{1}{4}\pi)\sin(p) - (\cos(\frac{1}{4}\pi)\cos(p) - \sin(\frac{1}{4}\pi)\sin(p)) + 1\frac{1}{2}$

$= 2\sin(\frac{1}{4}\pi)\cos(p) - 2\cos(\frac{1}{4}\pi)\cos(p) + 3$

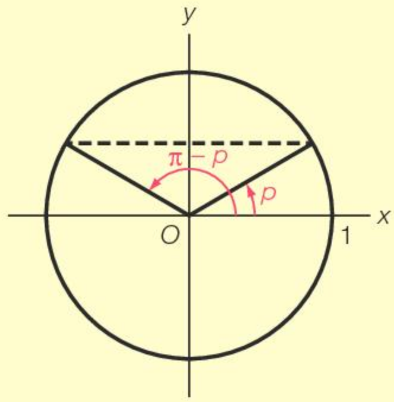
$= 2 \cdot \frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot \cos(p) - 2 \cdot \frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot \cos(p) + 3 = 3$

Er geldt $f(\frac{1}{4}\pi - p) + f(\frac{1}{4}\pi + p) = 2y_A$, dus de grafiek van f is symmetrisch in het punt $A(\frac{1}{4}\pi, 1\frac{1}{2})$.

In het voorbeeld zijn $f(\frac{3}{4}\pi - p)$, $f(\frac{3}{4}\pi + p)$, $f(\frac{1}{4}\pi - p)$ en $f(\frac{1}{4}\pi + p)$ uitgewerkt met de som- en verschilformules.
Krijg je te maken met bijvoorbeeld $f(\pi - p)$ en $f(\pi + p)$, dan is het handiger gebruik te maken van de symmetrie in de eenheidscirkel.

Bij het bewijs dat de grafiek van de functie $g(x) = \sin^2(x) - \cos(x)$ symmetrisch is in de lijn $x = \pi$, krijg je

$$\begin{aligned} g(\pi - p) &= \sin^2(\pi - p) - \cos(\pi - p) \\ &= \sin^2(p) - {}^-\cos(p) \\ &= \sin^2(p) + \cos(p) \end{aligned}$$

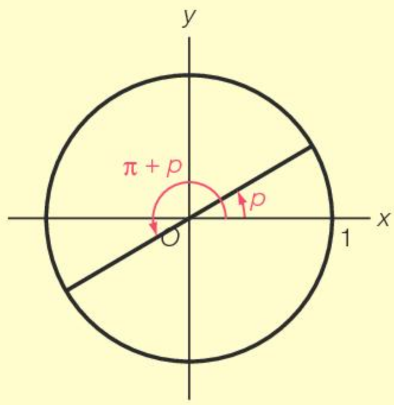


figuur 12.10
$\sin(\pi - p) = \sin(p)$ en
$\cos(\pi - p) = {}^-\cos(p)$

en

$$\begin{aligned} g(\pi + p) &= \sin^2(\pi + p) - \cos(\pi + p) \\ &= ({}^-\sin(p))^2 - {}^-\cos(p) \\ &= \sin^2(p) + \cos(p) \end{aligned}$$

Er geldt $g(\pi - p) = g(\pi + p)$, dus de grafiek van $g(x) = \sin^2(x) - \cos(x)$ is symmetrisch in de lijn $x = \pi$.

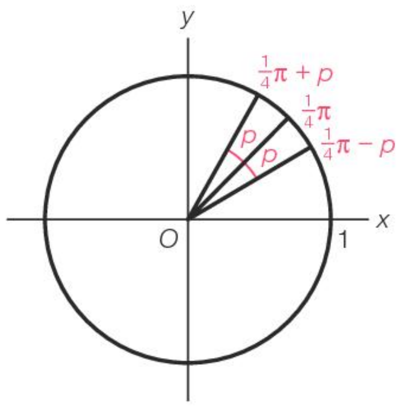


figuur 12.11
$\sin(\pi + p) = {}^-\sin(p)$ en
$\cos(\pi + p) = {}^-\cos(p)$

R24 Zie het voorbeeld.

a Licht toe hoe het kan dat de uitwerking van voorbeeld b korter is dan de uitwerking van voorbeeld a.

b Gerrit gebruikt bij de uitwerking van het voorbeeld niet de som- en verschilformules. Bij voorbeeld b gebruikt hij de figuur hiernaast, waaruit hij bijvoorbeeld afleest dat $\sin(\frac{1}{4}\pi - p) = \cos(\frac{1}{4}\pi + p)$. Geef de uitwerking van voorbeeld b die hierbij hoort.



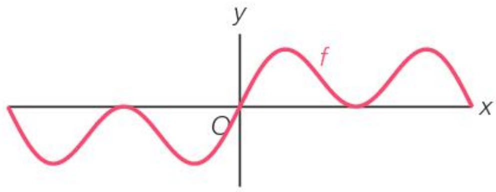
figuur 12.12

25

a Bewijs dat de grafiek van de functie $f(x) = x\cos(x)$ symmetrisch is in de oorsprong.

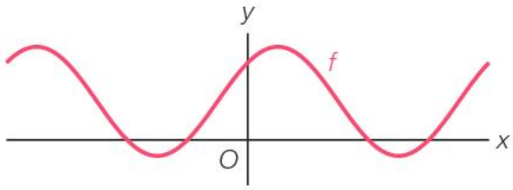
b Bewijs dat de grafiek van de functie $g(x) = x\sin(x)$ symmetrisch is in de y-as.

26 Gegeven is de functie $f(x) = \cos^2(x)\sin(x)$.
Bewijs dat de grafiek van f
a symmetrisch is in O
b symmetrisch is in de lijn $x = \frac{1}{2}\pi$.



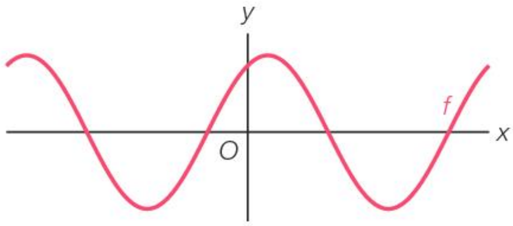
figuur 12.13

A27 Bewijs dat de grafiek van de functie
$f(x) = \cos(x) + \sin(x) + 1$
a symmetrisch is in de lijn $x = \frac{1}{4}\pi$
b symmetrisch is in het punt $A(\frac{3}{4}\pi, 1)$.



figuur 12.14

A28 Onderzoek of de grafiek van de functie
$f(x) = \sin(x) + \sqrt{3} \cdot \cos(x)$ symmetrisch
is in de lijn $x = \frac{1}{6}\pi$.



figuur 12.15

O29 Gegeven is de functie $f(x) = \sin^2(x)$.
a Is $y = \frac{1}{3}\sin^3(x)$ een primitieve van f? Licht toe.
b Gebruik de formule $\cos(2A) = 1 - 2\sin^2(A)$ om $\sin^2(x)$ in $\cos(2x)$ uit te drukken.
c Bereken de primitieven van f.

Theorie B Verdubbelingsformules en primitiveren

Van goniometrische functies die niet van de vorm $y = a + b\sin(c(x - d))$ of $y = a + b\cos(c(x - d))$ zijn, is het meestal niet eenvoudig de primitieven te vinden. Soms zijn deze functies met behulp van een verdubbelingsformule te herleiden tot een vorm die je wel kunt primitiveren.

Voorbeeld

Primitiveer de functie $f(x) = \cos^2(4x)$.

$\cos(2A) = 2\cos^2(A) - 1$
$2\cos^2(A) = 1 + \cos(2A)$
$\cos^2(A) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2A)$

Uitwerking
$f(x) = \cos^2(4x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(8x)$
$F(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{16}\sin(8x) + c$

30 Primitiveer.

a $f(x) = \cos^2(x)$

b $g(x) = \sin^2(3x)$

c $h(x) = \sin(\frac{1}{2}x)\cos(\frac{1}{2}x)$

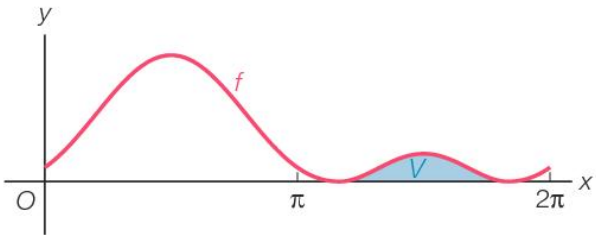
31 Bereken exact.

a $\int_0^{\frac{1}{6}\pi} \sin(2x)\cos(2x)\,dx$

b $\int_{\frac{1}{3}\pi}^{\pi} (2 - \frac{1}{2}\sin^2(x))\,dx$

32 Het vlakdeel V wordt ingesloten door de grafiek van de functie $f(x) = \sin(2x)$ met domein $[0, \frac{1}{2}\pi]$ en de x-as.
Bereken exact de inhoud van het lichaam L dat ontstaat als V wentelt om de x-as.

A33 Gegeven is de functie $f(x) = \sin^2(x) + \sin(x) + \frac{1}{4}$ met domein $[0, 2\pi]$.
Het vlakdeel V wordt ingesloten door de grafiek van f en de x-as. Zie figuur 12.16.
Bereken exact de oppervlakte van V.

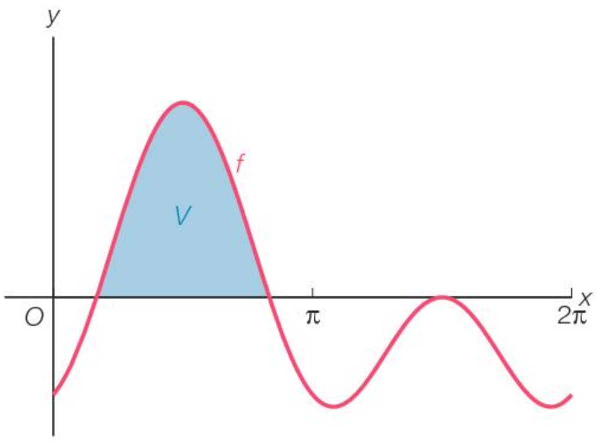


figuur 12.16

A34 In figuur 12.17 is de grafiek getekend van de functie $f(x) = 2\sin^2(x) + \sin(x) - 1$ met domein $[0, 2\pi]$.

a Bereken exact het bereik van f.

b Bereken exact de oppervlakte van V.



figuur 12.17

A35 Voor elke $p > 0$ is de functie f_p gegeven door $f_p(x) = p\sin(\frac{1}{3}x)\cos(\frac{1}{3}x)$ met domein $[0, 1\frac{1}{2}\pi]$.
Het vlakdeel V_p wordt ingesloten door de grafiek van f_p en de x-as.
Bereken exact voor welke p de oppervlakte van V_p gelijk is aan 10.

Terugblik

Lijn- en puntsymmetrie

De grafiek van een functie f is

- lijnsymmetrisch in de lijn $x = a$ als $f(a - p) = f(a + p)$ voor elke p
- puntsymmetrisch in (a, b) als $f(a - p) + f(a + p) = 2b$ voor elke p.

Je toont als volgt aan dat de grafiek van de functie $f(x) = \cos(x) - \sin(x)$ symmetrisch is in $A(\frac{1}{4}\pi, 0)$.

$$\begin{aligned}
&f(\tfrac{1}{4}\pi - p) + f(\tfrac{1}{4}\pi + p)\\
&\quad = \cos(\tfrac{1}{4}\pi - p) - \sin(\tfrac{1}{4}\pi - p) + \cos(\tfrac{1}{4}\pi + p) - \sin(\tfrac{1}{4}\pi + p)\\
&\quad = \cos(\tfrac{1}{4}\pi)\cos(p) + \sin(\tfrac{1}{4}\pi)\sin(p) - (\sin(\tfrac{1}{4}\pi)\cos(p) - \cos(\tfrac{1}{4}\pi)\sin(p))\\
&\qquad + \cos(\tfrac{1}{4}\pi)\cos(p) - \sin(\tfrac{1}{4}\pi)\sin(p) - (\sin(\tfrac{1}{4}\pi)\cos(p) + \cos(\tfrac{1}{4}\pi)\sin(p))\\
&\quad = \tfrac{1}{2}\sqrt{2} \cdot \cos(p) + \tfrac{1}{2}\sqrt{2} \cdot \sin(p) - (\tfrac{1}{2}\sqrt{2} \cdot \cos(p) - \tfrac{1}{2}\sqrt{2} \cdot \sin(p))\\
&\qquad + \tfrac{1}{2}\sqrt{2} \cdot \cos(p) - \tfrac{1}{2}\sqrt{2} \cdot \sin(p) - (\tfrac{1}{2}\sqrt{2} \cdot \cos(p) + \tfrac{1}{2}\sqrt{2} \cdot \sin(p))\\
&\quad = \sqrt{2} \cdot \sin(p) - \sqrt{2} \cdot \sin(p) = 0
\end{aligned}$$

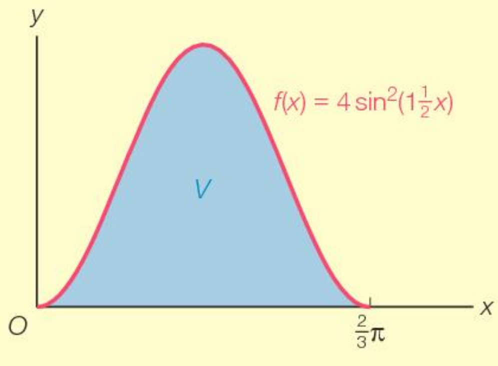
$f(\frac{1}{4}\pi - p) + f(\frac{1}{4}\pi + p) = 0 = 2y_A$

Dus de grafiek van f is symmetrisch in $A(\frac{1}{4}\pi, 0)$.

Verdubbelingsformules en primitiveren

Door gebruik te maken van verdubbelingsformules kun je soms het functievoorschrift van een functie f zo herleiden, dat je de primitieven van f kunt vinden.
Zo gebruik je bij het primitiveren van de functie $f(x) = 4\sin^2(1\frac{1}{2}x)$ de formule $\cos(2A) = 1 - 2\sin^2(A)$ oftewel $\sin^2(A) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2A)$ met $A = 1\frac{1}{2}x$.

Bij het exact berekenen van de oppervlakte van het vlakdeel V in de figuur hiernaast krijg je

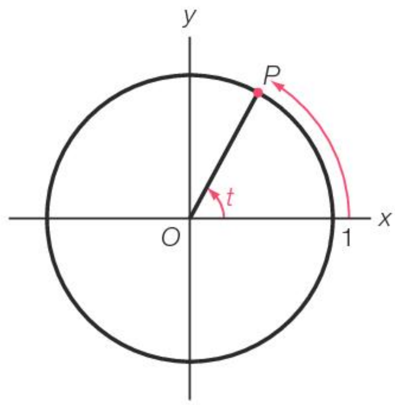


$$\begin{aligned}
O(V) &= \int_0^{\frac{2}{3}\pi} f(x)\,dx\\
&= \int_0^{\frac{2}{3}\pi} 4\sin^2(1\tfrac{1}{2}x)\,dx\\
&= \int_0^{\frac{2}{3}\pi} 4(\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\cos(3x))\,dx\\
&= \int_0^{\frac{2}{3}\pi} (2 - 2\cos(3x))\,dx\\
&= \left[2x - \tfrac{2}{3}\sin(3x)\right]_0^{\frac{2}{3}\pi}\\
&= 2 \cdot \tfrac{2}{3}\pi - \tfrac{2}{3}\sin(2\pi) - (0 - \tfrac{2}{3}\sin(0))\\
&= 1\tfrac{1}{3}\pi.
\end{aligned}$$

12.3 Eenparige cirkelbewegingen en harmonische trillingen

O36 Over de eenheidscirkel beweegt het punt P met constante snelheid. Op tijdstip $t = 0$ met t in seconden bevindt P zich in het punt $(1, 0)$. De bewegingsvergelijkingen van P zijn $\begin{cases} x_P(t) = \cos(t) \\ y_P(t) = \sin(t) \end{cases}$

Na hoeveel seconden is P voor het eerst weer in het punt $(1, 0)$?



figuur 12.18

Theorie A Eenparige cirkelbewegingen

De punten P en Q bewegen met constante snelheid over de eenheidscirkel.

Voor P gelden de bewegingsvergelijkingen $\begin{cases} x_P(t) = \cos(t) \\ y_P(t) = \sin(t) \end{cases}$

en voor Q gelden de bewegingsvergelijkingen $\begin{cases} x_Q(t) = \cos(1\frac{1}{2}t) \\ y_Q(t) = \sin(1\frac{1}{2}t) \end{cases}$

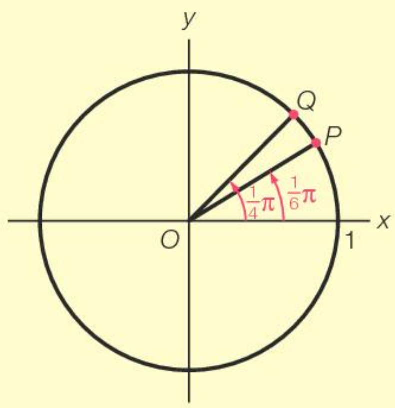
Hierbij is t de tijd in seconden.
Je hebt te maken met **eenparige cirkelbewegingen**.
De draairichting is positief en Q beweegt $1\frac{1}{2}$ keer zo snel als P.
De **omlooptijd** van P is 2π seconden en de omlooptijd van Q is $\frac{2\pi}{1\frac{1}{2}} = \frac{4}{3}\pi$ seconden.

Op $t = \frac{1}{6}\pi$ is P in het punt $(\cos(\frac{1}{6}\pi), \sin(\frac{1}{6}\pi)) = (\frac{1}{2}\sqrt{3}, \frac{1}{2})$ en is Q in het punt $(\cos(1\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6}\pi), \sin(1\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6}\pi)) =$ $(\cos(\frac{1}{4}\pi), \sin(\frac{1}{4}\pi)) = (\frac{1}{2}\sqrt{2}, \frac{1}{2}\sqrt{2})$.

De afstand tussen P en Q op $t = \frac{1}{6}\pi$ is

$$PQ = \sqrt{(\tfrac{1}{2}\sqrt{2} - \tfrac{1}{2}\sqrt{3})^2 + (\tfrac{1}{2}\sqrt{2} - \tfrac{1}{2})^2}$$
$$= \sqrt{\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\sqrt{6} + \tfrac{3}{4} + \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\sqrt{2} + \tfrac{1}{4}}$$
$$= \sqrt{2 - \tfrac{1}{2}\sqrt{6} - \tfrac{1}{2}\sqrt{2}}.$$

Afgerond op twee decimalen is dit 0,26.



figuur 12.19

Voorbeeld

Van de punten P en Q zijn de bewegingsvergelijkingen

$\begin{cases} x_P(t) = \cos(t) \\ y_P(t) = \sin(t) \end{cases}$ en $\begin{cases} x_Q(t) = \cos(1\frac{1}{2}t) \\ y_Q(t) = \sin(1\frac{1}{2}t) \end{cases}$ met t de tijd in seconden.

Voor de afstand tussen P en Q geldt $PQ = \sqrt{2 - 2\cos(\frac{1}{2}t)}$.
Bewijs dit.

Uitwerking

$$\begin{aligned} PQ^2 &= (\cos(1\tfrac{1}{2}t) - \cos(t))^2 + (\sin(1\tfrac{1}{2}t) - \sin(t))^2 \\ &= \cos^2(1\tfrac{1}{2}t) - 2\cos(1\tfrac{1}{2}t)\cos(t) + \cos^2(t) + \sin^2(1\tfrac{1}{2}t) - 2\sin(1\tfrac{1}{2}t)\sin(t) + \sin^2(t) \\ &= 2 - 2(\cos(1\tfrac{1}{2}t)\cos(t) + \sin(1\tfrac{1}{2}t)\sin(t)) \\ &= 2 - 2\cos(1\tfrac{1}{2}t - t) \\ &= 2 - 2\cos(\tfrac{1}{2}t) \end{aligned}$$

Dus $PQ = \sqrt{2 - 2\cos(\frac{1}{2}t)}$.

R37 Zie het voorbeeld.

a Welke goniometrische formules zijn in de uitwerking gebruikt?

b Bereken met de formule $PQ = \sqrt{2 - 2\cos(\frac{1}{2}t)}$ de afstand tussen P en Q op $t = \frac{1}{6}\pi$. Geef het antwoord in twee decimalen.

c Bereken exact voor welke t in $[0, 4\pi]$ de afstand tussen P en Q gelijk is aan 1.

d Bereken voor welke t in $[0, 4\pi]$ de afstand tussen P en Q groter is dan $1\frac{1}{2}$. Rond af op twee decimalen.

38 Van de punten A en B zijn de bewegingsvergelijkingen

$\begin{cases} x_A(t) = \cos(2t) \\ y_A(t) = \sin(2t) \end{cases}$ en $\begin{cases} x_B(t) = 3\cos(t) \\ y_B(t) = 3\sin(t) \end{cases}$ met t de tijd in seconden en $0 \leq t \leq 2\pi$.

a Bereken exact de afstand tussen A en B op $t = \frac{1}{4}\pi$.

b Beredeneer dat de minimale afstand tussen A en B gelijk is aan 2 en dat de maximale afstand gelijk is aan 4. Voor welke waarden van t worden deze afstanden bereikt?

Voor de afstand tussen A en B geldt $AB = \sqrt{10 - 6\cos(t)}$.

c Bewijs dit.

d Bereken exact voor welke t de afstand tussen A en B gelijk is aan $\sqrt{7}$.

e Bereken voor welke t de afstand tussen A en B kleiner is dan 3. Rond zo nodig af op twee decimalen.

39

Gegeven zijn de bewegingsvergelijkingen van opgave 38.

a Bereken exact de lengte van het deel van de baan van A dat boven de lijn $y = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ ligt.

De parabool $y = \frac{2}{3}x^2$ snijdt de baan van A in de punten P en Q en de baan van B in de punten R en S.

b Bereken exact de coördinaten van P en Q.

c Bereken de coördinaten van R en S. Rond af op drie decimalen.

A40

De baan van punt P is gegeven door de bewegingsvergelijkingen

$\begin{cases} x_P(t) = 2\cos(t) \\ y_P(t) = 2\sin(t) \end{cases}$ met t in seconden.

a Bereken de coördinaten van de snijpunten van de baan van P met de lijn $y = x + 1$. Rond af op twee decimalen.

b Bereken exact de lengte van het deel van de baan dat rechts van de lijn $x = 1$ ligt.

De baan van punt Q is gegeven door de bewegingsvergelijkingen

$\begin{cases} x_Q(t) = \cos(2t) \\ y_Q(t) = \sin(2t) \end{cases}$ met t in seconden.

Voor de afstand tussen de punten P en Q geldt $PQ = \sqrt{5 - 4\cos(t)}$.

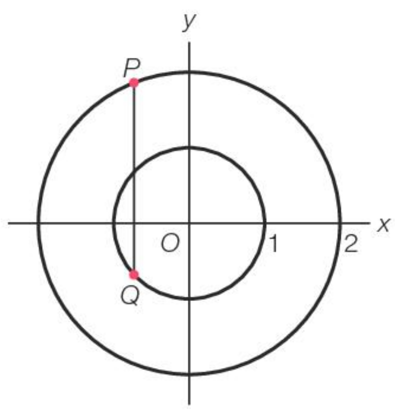
c Bewijs dit.

d Bereken hoeveel seconden per rondgang van P de afstand tussen P en Q groter is dan $1\frac{1}{2}$. Rond af op twee decimalen.

Voor $0 \leq t \leq 2\pi$ zijn er twee situaties waarbij het lijnstuk PQ verticaal is. In figuur 12.20 is een van deze situaties getekend.

e Bereken voor deze situatie de waarde van t. Rond af op drie decimalen.

f Teken de situatie voor de andere waarde van t. Licht je tekening toe.



figuur 12.20

O41

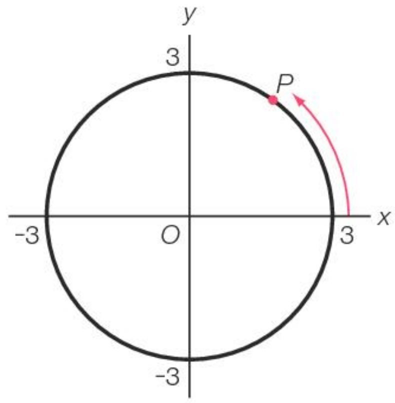
Het punt P doorloopt met constante snelheid de cirkel met middelpunt (0, 0) en straal 3. De draairichting is positief.

De bewegingsvergelijkingen van P zijn $x_P(t) = 3\cos(\frac{2}{5}\pi t)$ en $y_P(t) = 3\sin(\frac{2}{5}\pi t)$, waarbij t de tijd in seconden is.

Tegelijk met het punt P beweegt P' over de y-as.

Hierbij staat PP' loodrecht op de y-as.

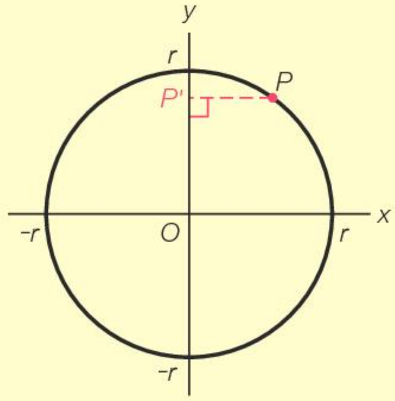
Geef de formule van $y_{P'}$.



figuur 12.21

Theorie B Harmonische trillingen

Het punt P doorloopt de cirkel in figuur 12.22. Hierbij voert de projectie P' van P op de y-as een **trilling** uit. Doorloopt het punt P de cirkel met constante snelheid, dan voert het punt P' een **harmonische trilling** uit. In plaats van harmonische trilling zegt men ook wel **harmonische beweging**.



figuur 12.22 $PP' \perp y$-as, dus P' is de projectie van P op de y-as.

Bij een eenparige cirkelbeweging van een punt P hoort een harmonische trilling van de projectie P' van P op de y-as.

De formule die de harmonische trilling van P' beschrijft is gelijk aan de formule van y_P. Bij een trilling spreekt men niet van omlooptijd, maar van **trillingstijd**. Bij een harmonische trilling is de trillingstijd dus gelijk aan de omlooptijd van de bijbehorende eenparige cirkelbeweging. Zo is bij de harmonische trilling die gegeven is door $u = 3\sin(\frac{2}{5}\pi t)$ met t in seconden de trillingstijd 5 seconden. De **frequentie** in hertz (Hz) is het aantal trillingen per seconde, dus de frequentie is $\frac{1}{5}$ Hz. De **amplitude** bij deze trilling is 3. In plaats van amplitude spreekt men bij trillingen ook wel over **maximale uitwijking**.

Bij een harmonische trilling met amplitude b en frequentie f waarbij op $t = 0$ de evenwichtsstand stijgend wordt gepasseerd, hoort een formule van de vorm $u = b\sin(ct)$ met $c = 2\pi f$ en t de tijd in seconden.

De trillingstijd is $T = \dfrac{1}{f} = \dfrac{2\pi}{c}$ seconden.

$$u = b\sin(2\pi f t)$$
$$u = b\sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right)$$

Voorbeeld

Het punt P voert een harmonische trilling uit die beschreven wordt door $u = 6\sin(10\pi t)$. Hierin is u in cm en t in seconden.

a Bereken de frequentie van P.
b Hoeveel meter legt P af in één minuut?

Uitwerking

a De frequentie is $\dfrac{10\pi}{2\pi} = 5$ Hz.

b Per trilling is de afgelegde afstand $4 \cdot 6 = 24$ cm.
Er zijn 5 trillingen per seconde, dus per minuut zijn er $60 \cdot 5 = 300$ trillingen.
De afgelegde afstand in één minuut is $300 \cdot 24 = 7200$ cm $= 72$ m.

42 Het punt P voert een harmonische trilling uit die beschreven wordt door $u = 5\sin(50\pi t)$. Hierin is u in cm en t in seconden.

a Bereken de frequentie van P.

b Hoeveel km legt P af in één kwartier?

43 Het punt P voert een harmonische trilling uit met amplitude 10 en frequentie 3 hertz. Op $t = 0$ wordt de evenwichtsstand stijgend gepasseerd.
Stel de formule die deze trilling beschrijft op in de vorm $u = b\sin(ct)$.

A44 In figuur 12.23 zie je een schematische tekening van een slinger.
Het punt A beweegt tijdens de slingerbeweging over boog BC van de cirkel met middelpunt P en straal $PA = l$.
Een uurwerk heeft een slinger met lengte $l = 1{,}00$ m.
De (slinger)hoek BPC is 10°.

a Bereken in vier decimalen de lengte van de boog BC.

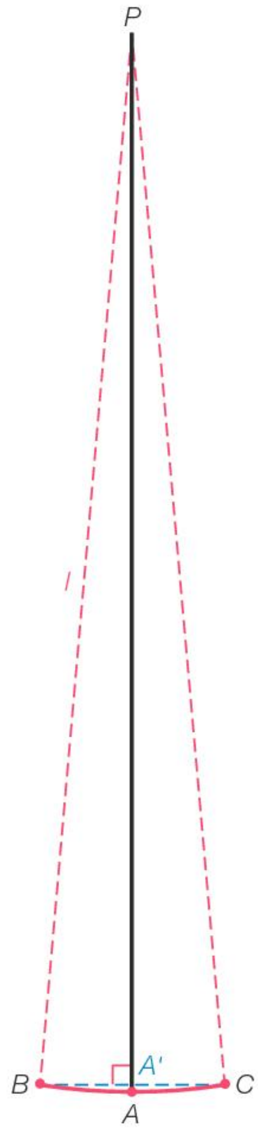
b Bereken in vier decimalen de lengte van het lijnstuk BC.

Je ziet dat bij dit uurwerk de lengte van de boog BC vrijwel gelijk is aan de lengte van het lijnstuk BC. De slingerbeweging van het punt A mag daarom benaderd worden door een harmonische trilling van het punt A' langs het lijnstuk BC.

Men kan aantonen dat de trillingstijd T wordt gegeven door de formule $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g}}$.
Hierbij is g de versnelling die wordt veroorzaakt door de zwaartekracht. Neem $g = 9{,}81$ m/s^2.
Neem aan dat de harmonische trilling beschreven wordt door $u = b\sin(ct)$ met u in meter en t in seconden.

c Bereken in twee decimalen de waarden van b en c.

d Iedere keer dat de slinger door de evenwichtsstand gaat, geeft de klok een tik.
Hoeveel tikken geeft de klok per seconde?



figuur 12.23

R45 De bewegingsvergelijkingen van het punt P zijn $\begin{cases} x(t) = b\cos(ct) \\ y(t) = b\sin(ct) \end{cases}$
De projectie van P op de x-as is P''.

a Licht toe dat P'' een harmonische trilling uitvoert. Welke formule hoort bij deze trilling?

b Licht de volgende bewering toe.
De projectie van P op de lijn $y = x$ voert een harmonische trilling uit.

Terugblik

Eenparige cirkelbeweging

Bij het punt P horen de bewegingsvergelijkingen

$\begin{cases} x_P(t) = 4\cos(\frac{2}{3}t) \\ y_P(t) = 4\sin(\frac{2}{3}t) \end{cases}$ met t de tijd in seconden.

Het punt P doorloopt de cirkel met middelpunt $O(0, 0)$ en straal 4 in positieve draairichting. Op $t = 0$ is P in het punt $(4, 0)$ en de omlooptijd is $\frac{2\pi}{\frac{2}{3}} = 3\pi$ seconden.

Het punt Q doorloopt in positieve draairichting de eenheidscirkel, is op $t = 0$ in het punt $(1, 0)$ en de omlooptijd is $\frac{2}{3}\pi$ seconden.
Dus bij Q horen de bewegingsvergelijkingen

$\begin{cases} x_Q(t) = \cos(3t) \\ y_Q(t) = \sin(3t) \end{cases}$

$$\frac{2\pi}{\frac{2}{3}\pi} = 3$$

Je kunt als volgt bewijzen dat voor de afstand tussen P en Q geldt $PQ = \sqrt{17 - 8\cos(2\frac{1}{3}t)}$.

$$\begin{aligned} PQ^2 &= (\cos(3t) - 4\cos(\tfrac{2}{3}t))^2 + (\sin(3t) - 4\sin(\tfrac{2}{3}t))^2 \\ &= \cos^2(3t) - 8\cos(3t)\cos(\tfrac{2}{3}t) + 16\cos^2(\tfrac{2}{3}t) + \sin^2(3t) - 8\sin(3t)\sin(\tfrac{2}{3}t) + 16\sin^2(\tfrac{2}{3}t) \\ &= 1 + 16 - 8(\cos(3t)\cos(\tfrac{2}{3}t) + \sin(3t)\sin(\tfrac{2}{3}t)) \\ &= 17 - 8\cos(3t - \tfrac{2}{3}t) \\ &= 17 - 8\cos(2\tfrac{1}{3}t) \end{aligned}$$

Dus $PQ = \sqrt{17 - 8\cos(2\frac{1}{3}t)}$
Aan de formule van PQ kun je zien dat de afstand tussen P en Q varieert tussen $\sqrt{17 - 8} = \sqrt{9} = 3$ en $\sqrt{17 + 8} = \sqrt{25} = 5$, maar dit kun je ook beredeneren zonder gebruik te maken van de formule van PQ.
Om te berekenen voor welke t de afstand tussen P en Q gelijk is aan 4, los je de vergelijking $\sqrt{17 - 8\cos(2\frac{1}{3}t)} = 4$ op.

Harmonische trilling

Bij de eenparige cirkelbeweging van het punt P beschreven door

$\begin{cases} x(t) = 10\cos(\frac{1}{4}\pi t) \\ y(t) = 10\sin(\frac{1}{4}\pi t) \end{cases}$ voert de projectie P' van P op de y-as een harmonische trilling uit die beschreven wordt door $y = 10\sin(\frac{1}{4}\pi t)$.

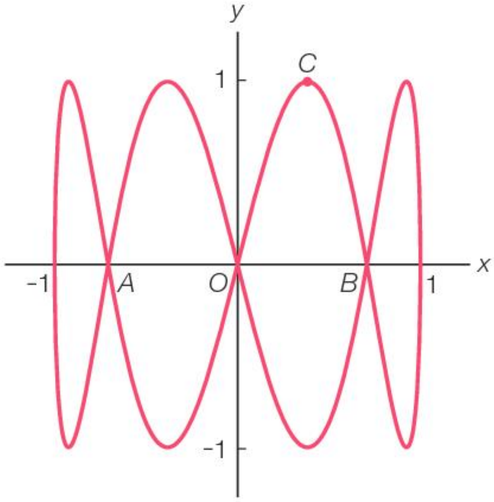
Is t in seconden, dan is de trillingstijd $T = \frac{2\pi}{\frac{1}{4}\pi} = 8$ seconden en de frequentie $f = \frac{1}{8}$ hertz.

12.4 Bewegingsvergelijkingen met goniometrische formules

O46 De baan van een punt P is gegeven door de bewegingsvergelijkingen $\begin{cases} x(t) = \sin(t) \\ y(t) = \sin(4t) \end{cases}$ met $0 \leq t \leq 2\pi$.
De baan snijdt de x-as behalve in de oorsprong, $(-1, 0)$ en $(1, 0)$ ook in de punten A en B. Zie figuur 12.24.

a Bereken x_A en x_B exact.

b Afgerond op twee decimalen is de x-coördinaat van de top C gelijk aan 0,38.
Bereken x_C in drie decimalen.



figuur 12.24

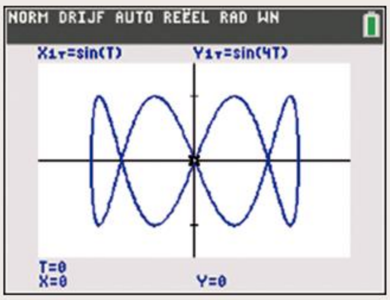
Theorie A Lengten, hoeken en snelheden

In deze paragraaf krijg je te maken met bewegingsvergelijkingen waarbij x en y functies zijn met een sinus of een cosinus en waarbij geen eenparige cirkelbeweging hoort. Neem je de parameter t in $\mathbb{R}$, dan wordt de baan oneindig vaak doorlopen. Daarom nemen we t vaak in een beperkt interval, bijvoorbeeld in $[0, 2\pi]$.
Zo wordt de baan in opgave 46 in $[0, 2\pi]$ één keer doorlopen. Neem je t in $[0, 4\pi]$ dan wordt de baan twee keer doorlopen.
Neem je $\begin{cases} x(t) = \sin(2t) \\ y(t) = \sin(8t) \end{cases}$ met t in $[0, 2\pi]$, dan wordt de baan in figuur 12.24 ook twee keer doorlopen.

INFORMATIEF

Bewegingsvergelijkingen en de GR

Op bladzijde 83 heb je kunnen lezen hoe je de baan van een parameterkromme kunt plotten op de GR. Ook de krommen in deze paragraaf kun je plotten met de instelling voor parametervoorstellingen.
Om de kromme die gegeven is door $x(t) = \sin(t)$ en $y(t) = \sin(4t)$ te plotten neem je t tussen 0 en 2π met stapgrootte bijvoorbeeld 0,05, en x en y bijvoorbeeld tussen −1,5 en 1,5.



Neem je t tussen 0 en 4π, dan zie je dat de baan twee keer wordt doorlopen.
Neem je t tussen 0 en π, dan wordt de helft van de baan doorlopen.

Voorbeeld

De baan van een punt P is gegeven door

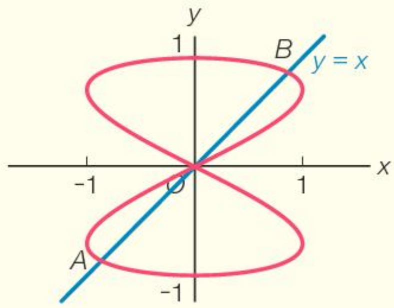
$$\begin{cases} x(t) = \sin(2t) \\ y(t) = \sin(t) \end{cases} \text{ met } 0 \leq t \leq 2\pi.$$

De punten A en B zijn snijpunten van de baan met de lijn $y = x$. Zie figuur 12.25.

a Bereken exact de lengte van het lijnstuk AB.

b Bereken exact de baansnelheid van P in B.

c Bereken de hoek φ die de baan in B maakt met de lijn $y = x$. Geef het antwoord in graden en rond af op één decimaal.



figuur 12.25

Uitwerking

a $x = \sin(2t)$ en $y = \sin(t)$ substitueren in $y = x$ geeft

$\sin(t) = \sin(2t)$

$t = 2t + k \cdot 2\pi \vee t = \pi - 2t + k \cdot 2\pi$

$-t = k \cdot 2\pi \vee 3t = \pi + k \cdot 2\pi$

$t = k \cdot 2\pi \vee t = \frac{1}{3}\pi + k \cdot \frac{2}{3}\pi$

t in $[0, 2\pi]$ geeft $t = 0 \vee t = \frac{1}{3}\pi \vee t = \pi \vee t = 1\frac{2}{3}\pi \vee t = 2\pi$

$t = 0$, $t = \pi$ en $t = 2\pi$ geven de oorsprong.

$x(\frac{1}{3}\pi) = \sin(\frac{2}{3}\pi) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ en $x(1\frac{2}{3}\pi) = \sin(3\frac{1}{3}\pi) = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$

Dus $A(-\frac{1}{2}\sqrt{3}, -\frac{1}{2}\sqrt{3})$ en $B(\frac{1}{2}\sqrt{3}, \frac{1}{2}\sqrt{3})$.

$$AB = \sqrt{(\tfrac{1}{2}\sqrt{3} + \tfrac{1}{2}\sqrt{3})^2 + (\tfrac{1}{2}\sqrt{3} + \tfrac{1}{2}\sqrt{3})^2} = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{3 + 3} = \sqrt{6}$$

b $x(t) = \sin(2t)$ geeft $x'(t) = 2\cos(2t)$

$y(t) = \sin(t)$ geeft $y'(t) = \cos(t)$

De baansnelheid in B is

$$v(\tfrac{1}{3}\pi) = \sqrt{(2\cos(\tfrac{2}{3}\pi))^2 + (\cos(\tfrac{1}{3}\pi))^2} = \sqrt{(2 \cdot -\tfrac{1}{2})^2 + (\tfrac{1}{2})^2}$$
$$= \sqrt{(-1)^2 + (\tfrac{1}{2})^2} = \sqrt{1\tfrac{1}{4}} = \tfrac{1}{2}\sqrt{5}.$$

c $\vec{v}(\frac{1}{3}\pi) = \begin{pmatrix} x'(\frac{1}{3}\pi) \\ y'(\frac{1}{3}\pi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cos(\frac{2}{3}\pi) \\ \cos(\frac{1}{3}\pi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ en $\vec{r}_{y=x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\cos(\varphi) = \frac{\left|-1 \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 1\right|}{\sqrt{(-1)^2 + (\frac{1}{2})^2} \cdot \sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{\left|-\frac{1}{2}\right|}{\sqrt{1\frac{1}{4}} \cdot \sqrt{2}} = \frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{2\frac{1}{2}}}, \text{ dus } \varphi \approx 71{,}6°.$$

R47 Zie het voorbeeld.

a De lijn $y = -x + 1$ snijdt de baan van P behalve in het punt $(0, 1)$ ook in het punt S.
Bereken de coördinaten van S. Rond af op drie decimalen.

b Bereken exact de baansnelheid van P in de oorsprong.

c Bereken de hoek φ die de baan in de oorsprong maakt met de x-as.
Geef het antwoord in graden en rond af op één decimaal.

48

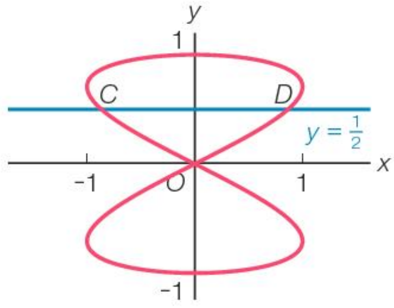
In figuur 12.26 zie je nog eens de baan van het punt P van het voorbeeld. De baan snijdt de lijn $y = \frac{1}{2}$ in de punten C en D.

a Bereken exact de lengte van het lijnstuk CD.

b Bereken exact de baansnelheid van P in D.

c Bereken in graden in één decimaal de hoek α die de baan in D maakt met de lijn $y = \frac{1}{2}$.

d Bereken in graden in één decimaal de hoek β waaronder de baan zichzelf snijdt in de oorsprong.



figuur 12.26

49

De baan van een punt P is gegeven door

$$\begin{cases} x(t) = \sin(2t) \\ y(t) = \sin(3t) \end{cases} \text{ met } 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Zie de baan in figuur 12.27. In het punt A is de raaklijn horizontaal en in het punt B is de raaklijn verticaal. In het punt C snijdt de baan zichzelf.

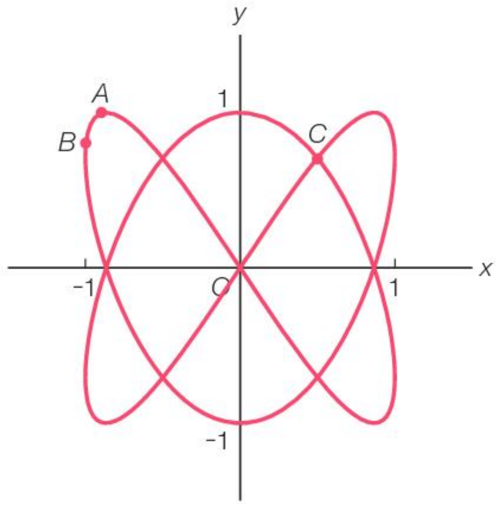
a Bereken exact de coördinaten van A en B.

b De lijn $y = x$ snijdt de baan van P behalve in de oorsprong nog in vier punten.
Bereken exact van deze punten de bijbehorende waarden van t.

c Toon aan dat C de coördinaten $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\sqrt{2})$ heeft.

d Bereken exact de baansnelheid waarmee P voor het eerst in C is.

e Bereken in graden nauwkeurig de hoek φ waaronder de baan zichzelf snijdt in de oorsprong.



figuur 12.27

50

De baan van een punt P is gegeven door

$$\begin{cases} x(t) = \sin(t - \frac{1}{6}\pi) \\ y(t) = \sin(2t) \end{cases} \text{ met } t \text{ in } [0, 2\pi].$$

De baan is getekend in figuur 12.28. In punt A is de raaklijn verticaal.

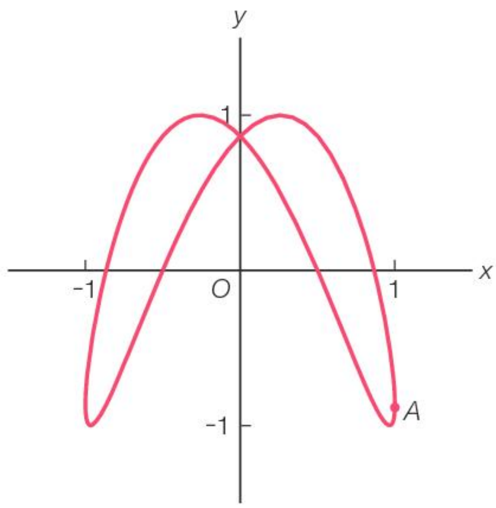
a Bereken exact de coördinaten van A.

b De lijn $x = \frac{1}{2}$ snijdt de baan in de punten B en C.
Bereken exact de lengte van het lijnstuk BC.

c Bereken exact de t-waarden van de snijpunten van de baan met de lijn $y = x$.

d De baan snijdt zichzelf in het punt $(0, \frac{1}{2}\sqrt{3})$.
Bereken de hoek waaronder dit gebeurt.

e Bereken exact de baansnelheid van P op $t = \frac{1}{3}\pi$.



figuur 12.28

A51 De baan van een punt P is gegeven door

$$\begin{cases} x(t) = \sin(2t) \\ y(t) = \sin(t + \frac{1}{3}\pi) \end{cases} \text{ met } 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Zie figuur 12.29. De snijpunten van de baan met de y-as zijn A, B, C en D.

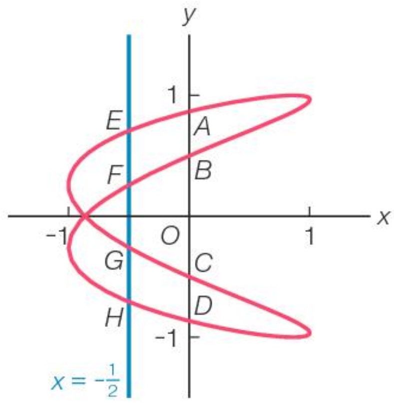
a Bereken exact de coördinaten van A, B, C en D.

De lijn $x = -\frac{1}{2}$ snijdt de baan in de punten E, F, G en H.

b Bereken exact de lengte van het lijnstuk EH.

c Bereken in graden nauwkeurig de hoek φ die de baan in B met de y-as maakt.

d Bereken exact de baansnelheid van P in E.



figuur 12.29

A52 Zie opgave 51.

Op $t = a$ bevindt P zich in het punt T en op $t = a + \pi$ in het punt U.

Er geldt $TU = |2\sin(a + \frac{1}{3}\pi)|$.

a Bewijs dit.

b Bereken exact voor welke a geldt $TU = 1$.

O53 De baan van een punt P is gegeven door

$$\begin{cases} x(t) = \sin(t + \frac{1}{4}\pi) \\ y(t) = \sin(2t) \end{cases} \text{ met } 0 \leq t \leq 2\pi.$$

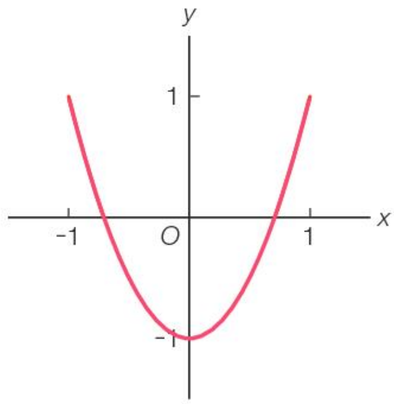
a Vul de tabel in.

t	$\frac{1}{4}\pi$	$\frac{3}{4}\pi$	$1\frac{1}{4}\pi$
x			
y			

De baan is getekend in figuur 12.30.

Bij de grafiek hoort een formule van de vorm $y = px^2 + q$.

b Welke waarden van p en q volgen uit de figuur?



figuur 12.30

Theorie B Formules bij parametervoorstellingen

In opgave 53 heb je de formule $y = 2x^2 - 1$ gevonden. Om te bewijzen dat elk punt van de kromme met parametervoorstelling

$$\begin{cases} x(t) = \sin(t + \frac{1}{4}\pi) \\ y(t) = \sin(2t) \end{cases} \text{ op de parabool } y = 2x^2 - 1 \text{ ligt, substitueer je}$$

$x = \sin(t + \frac{1}{4}\pi)$ en $y = \sin(2t)$ in $y = 2x^2 - 1$ en laat je zien dat dit een juiste bewering geeft.

Omdat $x(t) = \sin(t + \frac{1}{4}\pi)$ geldt $-1 \leq x \leq 1$, dus je krijgt maar een gedeelte van de parabool.

Voorbeeld

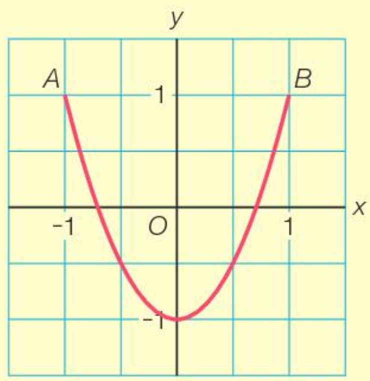
Bij de grafiek met parametervoorstelling $\begin{cases} x(t) = \sin(t + \frac{1}{4}\pi) \\ y(t) = \sin(2t) \end{cases}$ hoort de formule $y = 2x^2 - 1$ met $-1 \le x \le 1$.
Bewijs dit.

Uitwerking
Substitutie van $x = \sin(t + \frac{1}{4}\pi)$ en $y = \sin(2t)$ in $y = 2x^2 - 1$ geeft

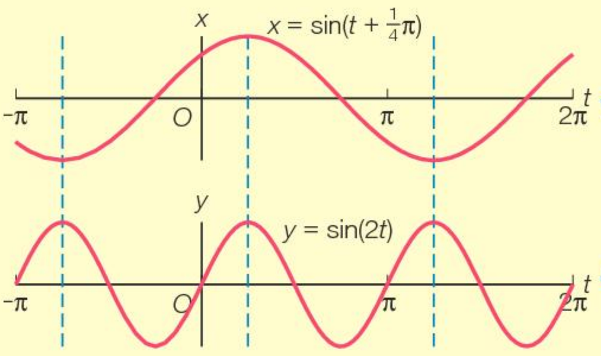
$\sin(2t) = 2(\sin(t + \frac{1}{4}\pi))^2 - 1$ — $\cos(2A) = 1 - 2\sin^2(A)$ dus $2\sin^2(A) - 1 = -\cos(2A)$
$\sin(2t) = -\cos(2(t + \frac{1}{4}\pi))$
$\sin(2t) = -\cos(2t + \frac{1}{2}\pi)$ — $-\cos(A) = \cos(A + \pi)$
$\sin(2t) = \cos(2t + 1\frac{1}{2}\pi)$ — $\cos(A) = \sin(A + \frac{1}{2}\pi)$
$\sin(2t) = \sin(2t + 2\pi)$ — $\sin(A + 2\pi) = \sin(A)$
$\sin(2t) = \sin(2t)$

$\left.\begin{array}{l} \text{Dit klopt voor elke } t. \\ x = \sin(t + \frac{1}{4}\pi) \\ -1 \le \sin(t + \frac{1}{4}\pi) \le 1 \end{array}\right\}$ Bij de parametervoorstelling hoort de formule $y = 2x^2 - 1$ met $-1 \le x \le 1$.

De baan van een bewegend punt P dat beschreven wordt door $\begin{cases} x(t) = \sin(t + \frac{1}{4}\pi) \\ y(t) = \sin(2t) \end{cases}$ is dat deel van de parabool $y = 2x^2 - 1$ waarvoor $-1 \le x \le 1$.
Neem je t op $\mathbb{R}$ dan doorloopt P voortdurend de parabool tussen $A(-1, 1)$ en $B(1, 1)$.
In deze punten keert de richting waarin P beweegt om, daarom heten deze punten *keerpunten*.
In keerpunten hebben de formules voor x en y uit de parametervoorstelling beide een extreme waarde.



figuur 12.31



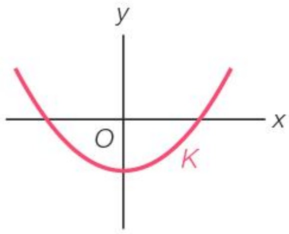
x en y hebben beide een extreem voor
..., $t = -\frac{3}{4}\pi$, $t = \frac{1}{4}\pi$, $t = 1\frac{1}{4}\pi$, ...

figuur 12.32

54 Bij de grafiek met parametervoorstelling $\begin{cases} x(t) = \sin(t - \frac{1}{4}\pi) \\ y(t) = \sin(2t) \end{cases}$
hoort de formule $y = -2x^2 + 1$ met $-1 \leq x \leq 1$.
Bewijs dit.

55 In figuur 12.33 is de kromme K getekend die gegeven is door
$\begin{cases} x(t) = 2\sin(t) \\ y(t) = \sin(2t - \frac{1}{2}\pi) \end{cases}$

a Bereken de coördinaten van de keerpunten van K.
b Welke formule hoort vermoedelijk bij K?
Bewijs je vermoeden.

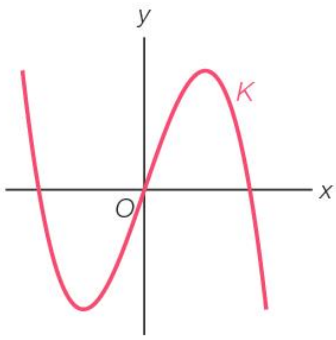


figuur 12.33

A56 De baan van een punt P is gegeven door $\begin{cases} x(t) = \sin(t) \\ y(t) = \sin(2t) \end{cases}$
Bij de baan van P hoort de formule $y^2 = 4x^2 - 4x^4$ met $-1 \leq x \leq 1$.
Bewijs dit.

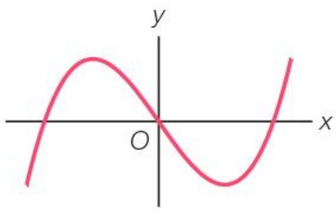
A57 In figuur 12.34 is de kromme K getekend die gegeven is door
$\begin{cases} x(t) = \sin(t) \\ y(t) = \sin(3t) \end{cases}$

a Bereken de coördinaten van de keerpunten van K.
b Bewijs dat alle punten van K op de grafiek van
$y = 3x - 4x^3$ liggen.



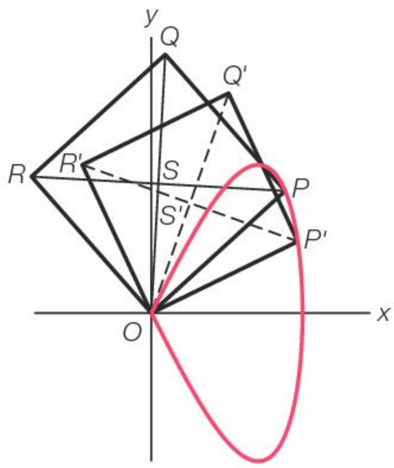
figuur 12.34

E58 De baan van een punt P wordt beschreven door de bewegingsvergelijkingen $x(t) = 2\cos(t)$ en $y(t) = \cos(3t)$.
Zie figuur 12.35.
Bij de baan van P hoort een formule van de vorm
$y = ax^3 + bx$ met $c \leq x \leq d$.
Bereken a, b, c en d en bewijs dat deze formule juist is.



figuur 12.35

O59 De baan van een punt P is gegeven door
$\begin{cases} x_P(t) = 2\sin(t) \\ y_P(t) = 2\sin(2t) \end{cases}$ met $0 < t < \pi$.
Het lijnstuk OP is een zijde van een vierkant. In figuur 12.36 zijn twee van deze vierkanten getekend.
Het punt S is het midden van zo'n vierkant.
Als P zijn baan beschrijft, verandert S mee.
We vragen ons af wat de bewegingsvergelijkingen van S zijn. Er geldt $\vec{s} = \frac{1}{2}\vec{p} + \frac{1}{2}\vec{p}_L$.
Licht dit toe.



figuur 12.36

Theorie C Bewegingsvergelijkingen van meebewegende punten

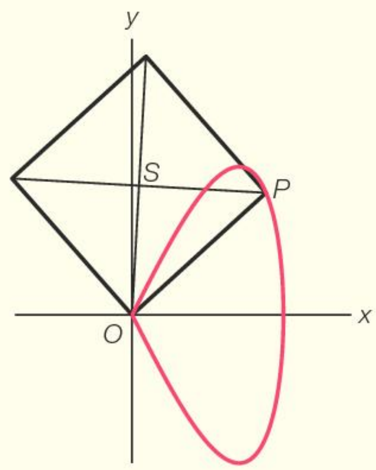
In opgave 59 beschrijft het punt S een baan die afhangt van de baan van het punt P. Om de bewegingsvergelijkingen van de baan van S te vinden, gebruik je een rotatie van een vector over 90°. Zie het voorbeeld.

Voorbeeld

De baan van een punt P is gegeven door

$$\begin{cases} x_P(t) = 2\sin(t) \\ y_P(t) = 2\sin(2t) \end{cases} \text{ met } 0 < t < \pi.$$

Het lijnstuk OP is de zijde van een vierkant zoals in de figuur hiernaast.
Het punt S is het midden van dit vierkant.
De baan van S snijdt de y-as één keer.
Stel de bewegingsvergelijkingen van S op en bereken hiermee exact de coördinaten van dit snijpunt.



figuur 12.37

Uitwerking

$\vec{s} = \frac{1}{2}\vec{p} + \frac{1}{2}\vec{p}_{\text{L}}$

$\vec{p} = \begin{pmatrix} 2\sin(t) \\ 2\sin(2t) \end{pmatrix}$ geeft $\vec{p}_{\text{L}} = \begin{pmatrix} -2\sin(2t) \\ 2\sin(t) \end{pmatrix}$

$\vec{s} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2\sin(t) \\ 2\sin(2t) \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -2\sin(2t) \\ 2\sin(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin(t) - \sin(2t) \\ \sin(2t) + \sin(t) \end{pmatrix}$

De bewegingsvergelijkingen van S zijn $\begin{cases} x_S(t) = \sin(t) - \sin(2t) \\ y_S(t) = \sin(2t) + \sin(t) \end{cases}$

Snijden met de y-as geeft $\sin(t) - \sin(2t) = 0$

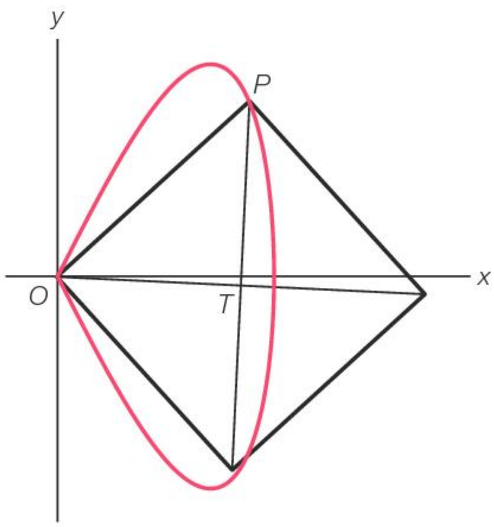
$$\begin{aligned} &\sin(t) = \sin(2t) \\ &t = 2t + k \cdot 2\pi \vee t = \pi - 2t + k \cdot 2\pi \\ &-t = k \cdot 2\pi \vee 3t = \pi + k \cdot 2\pi \\ &t = k \cdot 2\pi \vee t = \tfrac{1}{3}\pi + k \cdot \tfrac{2}{3}\pi \end{aligned}$$

t in $\langle 0, \pi \rangle$ geeft $t = \frac{1}{3}\pi$

$y_S(\frac{1}{3}\pi) = \sin(\frac{2}{3}\pi) + \sin(\frac{1}{3}\pi) = \frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{1}{2}\sqrt{3} = \sqrt{3}$

Dus $S(0, \sqrt{3})$.

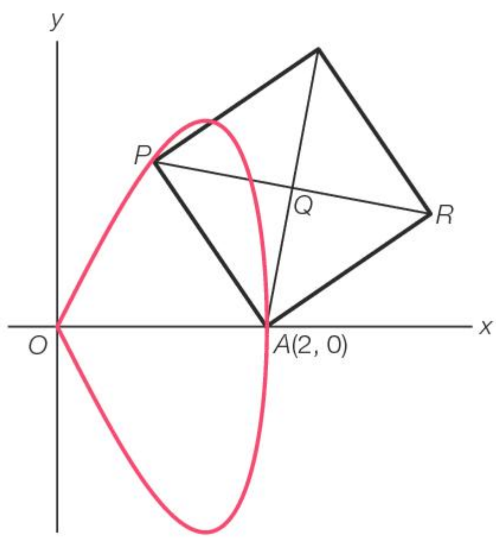
60 Zie het voorbeeld.
Nu wordt het vierkant aan de andere kant van het lijnstuk OP geplaatst zoals in figuur 12.38.
Het punt T is het midden van het vierkant dat zo ontstaat.
Stel de bewegingsvergelijkingen op van T.



figuur 12.38

61 In figuur 12.39 zie je nog eens de baan van het punt P van het voorbeeld. Verder is het punt $A(2, 0)$ getekend. Ook zie je een vierkant waarvan AP een zijde is.
Het punt Q is het midden van het vierkant dat zo ontstaat.

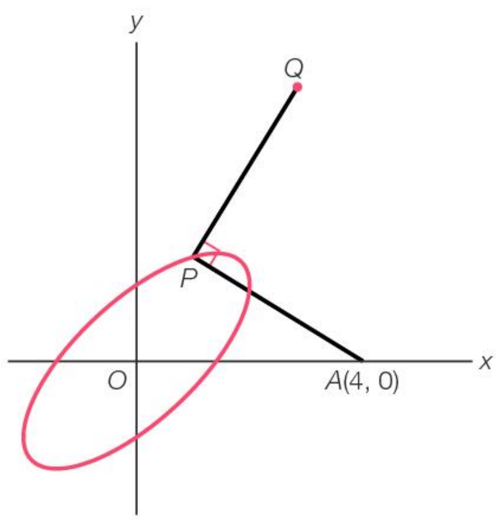
a Stel de bewegingsvergelijkingen op van Q.
b In figuur 12.39 is ook het hoekpunt R van het vierkant getekend. De baan van R snijdt de lijn $y = 1$ twee keer.
Bereken exact de coördinaten van de snijpunten.



figuur 12.39

62 De baan van een punt P is gegeven door
$$\begin{cases} x_P(t) = 2\sin(t) \\ y_P(t) = 2\sin(t - \frac{1}{4}\pi) \end{cases} \text{ met } 0 \leq t \leq 2\pi.$$
Verder is gegeven het punt $A(4, 0)$.
Het lijnstuk PQ met $PQ = AP$ staat loodrecht op AP zoals in figuur 12.40 is getekend.
Als het punt P zijn baan beschrijft, beweegt het punt Q mee. De bewegingsvergelijkingen van Q zijn
$$\begin{cases} x_Q(t) = 2\sin(t) + 2\sin(t - \frac{1}{4}\pi) \\ y_Q(t) = 2\sin(t - \frac{1}{4}\pi) - 2\sin(t) + 4 \end{cases}$$

a Bewijs dit.
b Onderzoek of het laagste punt van de baan van Q hoger ligt dan het hoogste punt van de baan van P.

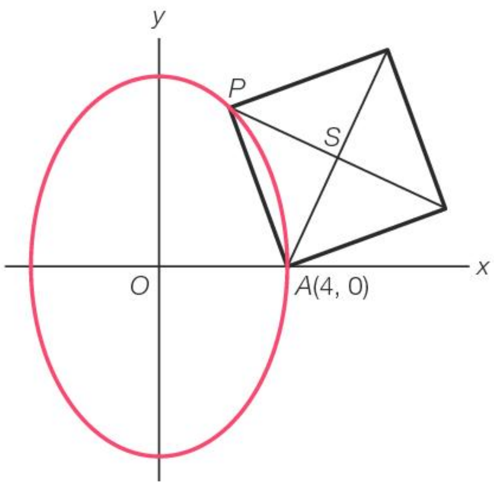


figuur 12.40

A63

De baan van een punt P is gegeven door
$$\begin{cases} x_P(t) = 4\cos(t) \\ y_P(t) = 6\sin(t) \end{cases} \text{ met } 0 \leq t \leq 2\pi.$$
In figuur 12.41 zie je de baan van P.
Het lijnstuk AP met $A(4, 0)$ is de zijde van een vierkant zoals in de figuur is getekend.
Het punt S is het midden van dit vierkant.
De bewegingsvergelijkingen van S zijn
$$\begin{cases} x_S(t) = 2 + 3\sin(t) + 2\cos(t) \\ y_S(t) = 2 + 3\sin(t) - 2\cos(t) \end{cases}$$

a Bewijs dit.



figuur 12.41

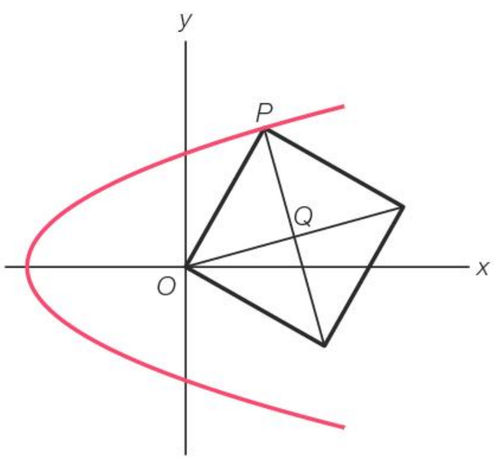
Bij de baan van P hoort de formule
$9x^2 + 4y^2 = 144$.

b Bewijs dit.

c De banen van P en S snijden elkaar behalve in het punt $A(4, 0)$ ook in het punt B.
Bereken de coördinaten van B. Rond af op twee decimalen.

A64

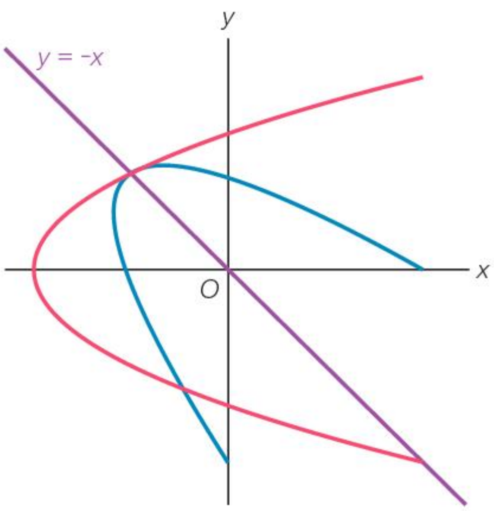
De baan van een punt P is gegeven door
$$\begin{cases} x_P(t) = 2\sin(2t) \\ y_P(t) = 2\sin(t + \frac{1}{4}\pi) \end{cases} \text{ met } \tfrac{1}{4}\pi \leq t \leq 1\tfrac{1}{4}\pi.$$
In figuur 12.42 zie je de baan van P.
Het lijnstuk OP is de zijde van een vierkant zoals in de figuur getekend. Het punt Q is het midden van dit vierkant.
Als P zijn baan beschrijft verandert Q mee.
De baan van Q snijdt de lijn $y = -x$ in het punt A.
Bereken exact de coördinaten van A.



figuur 12.42

E65

Zie opgave 64.
In figuur 12.43 zijn de banen van P en Q getekend, samen met de lijn $y = -x$.
Onderzoek of de banen van P en Q elkaar raken op de lijn $y = -x$.

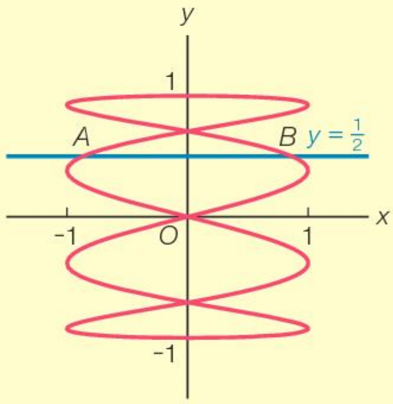


figuur 12.43

Terugblik

Lengten, hoeken en snelheden

In de figuur hiernaast zie je de baan van een punt P die gegeven is door $\begin{cases} x(t) = \sin(4t) \\ y(t) = \sin(t) \end{cases}$ met $0 \le t \le 2\pi$.
De snijpunten van de baan met de lijn $y = \frac{1}{2}$ zijn A en B.



Om exact de lengte van het lijnstuk AB te berekenen los je op $\sin(t) = \frac{1}{2}$. Dit geeft $t = \frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi \vee t = \frac{5}{6}\pi + k \cdot 2\pi$.
Omdat $x(\frac{1}{6}\pi) = \sin(\frac{2}{3}\pi) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ en $x(\frac{5}{6}\pi) = \sin(3\frac{1}{3}\pi) = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$ is $A(-\frac{1}{2}\sqrt{3}, \frac{1}{2})$ en $B(\frac{1}{2}\sqrt{3}, \frac{1}{2})$ dus $AB = \sqrt{3}$.

Om de hoek α te berekenen waaronder de baan de lijn $y = \frac{1}{2}$ snijdt in het punt A, bereken je de richtingscoëfficiënt van de raaklijn k in A. Omdat $x'(t) = 4\cos(4t)$ en $y'(t) = \cos(t)$ is

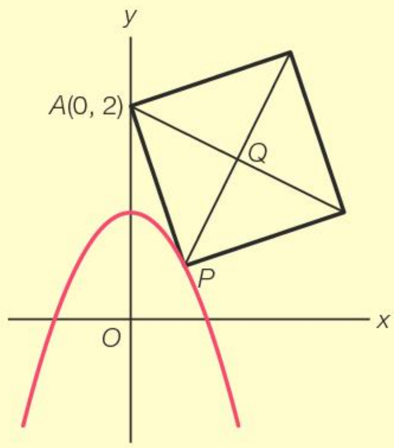
$$\vec{r}_k = \begin{pmatrix} x'(\frac{5}{6}\pi) \\ y'(\frac{5}{6}\pi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4\cos(3\frac{1}{3}\pi) \\ \cos(\frac{5}{6}\pi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \cdot -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2}\sqrt{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -\frac{1}{2}\sqrt{3} \end{pmatrix}, \text{ dus } \mathrm{rc}_k = \frac{-\frac{1}{2}\sqrt{3}}{-2} = \frac{1}{4}\sqrt{3}.$$

$\tan(\alpha) = \frac{1}{4}\sqrt{3}$ geeft $\alpha \approx 23{,}4°$

Om de snelheid te berekenen waarmee P de lijn $y = \frac{1}{2}$ in A passeert, bereken je $v(\frac{5}{6}\pi)$.
Je krijgt $v(\frac{5}{6}\pi) = \sqrt{(x'(\frac{5}{6}\pi))^2 + (y'(\frac{5}{6}\pi))^2} = \sqrt{(-2)^2 + (-\frac{1}{2}\sqrt{3})^2} = \frac{1}{2}\sqrt{19}$.

Meebewegende punten

In de figuur hiernaast is de baan van een punt P met bewegingsvergelijkingen $\begin{cases} x_p(t) = \sin(t) \\ y_p(t) = \cos(2t) \end{cases}$ getekend.
Verder zie je het punt $A(0, 2)$ en een vierkant waarvan AP een zijde is. Het punt Q is het midden van dit vierkant.
Als P zijn baan beschrijft, beweegt Q mee.
Om de bewegingsvergelijkingen van Q te vinden bedenk je dat $\vec{q} = \vec{a} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AP} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AP}_\text{L}$. Omdat



$\overrightarrow{AP} = \vec{p} - \vec{a} = \begin{pmatrix} \sin(t) \\ \cos(2t) - 2 \end{pmatrix}$ is $\frac{1}{2}\overrightarrow{AP}_\text{L} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\cos(2t) + 1 \\ \frac{1}{2}\sin(t) \end{pmatrix}$.
Zo krijg je

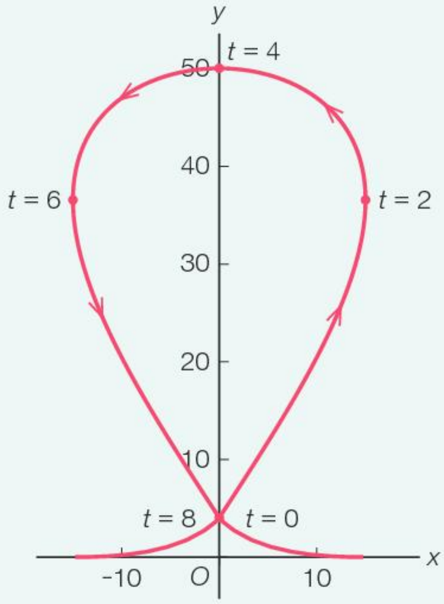
$$\vec{q} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sin(t) \\ \frac{1}{2}\cos(2t) - 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\cos(2t) + 1 \\ \frac{1}{2}\sin(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + \frac{1}{2}\sin(t) - \frac{1}{2}\cos(2t) \\ 1 + \frac{1}{2}\sin(t) + \frac{1}{2}\cos(2t) \end{pmatrix}.$$

Dus de bewegingsvergelijkingen van Q zijn

$$\begin{cases} x_Q(t) = 1 + \frac{1}{2}\sin(t) - \frac{1}{2}\cos(2t) \\ y_Q(t) = 1 + \frac{1}{2}\sin(t) + \frac{1}{2}\cos(2t) \end{cases}$$

Eindopdracht Looping in achtbaan

In de figuur hiernaast is het vooraanzicht van een looping van een achtbaan getekend. In de figuur zijn x en y in meters en is t de tijd in seconden.
Een treintje doet acht seconden over de looping. Op $t = 0$ en $t = 8$ is het treintje (in het vooraanzicht) in het punt (0, 4).
Op $t = 2$ en op $t = 6$ is het treintje in de punten waar de baan verticaal is. Deze punten hebben x-coördinaten 15 en −15.
Op $t = 4$ wordt het hoogste punt bereikt.
Dit punt ligt op een hoogte van 50 meter.
De baan van het treintje kan worden beschreven door bewegingsvergelijkingen van de vorm $x(t) = b\sin(ct)$ en $y(t) = p + q\sin(rt)$ met $0 \leq t \leq 8$.



- Geef exacte waarden van b, c, p, q en r.
- Bereken in gehele km/uur de snelheid van het treintje op $t = 0$, op $t = 2$ en op $t = 4$.
- Bereken de baanversnelling op $t = 7$.
  Worden de personen in het treintje op $t = 7$ tegen de rugleuning aangeduwd of worden ze door de veiligheidsbeugels op hun plaats gehouden? Licht toe.

De Dragon Khan in het Spaanse pretpark Port Aventura Park heeft acht inversies (dat is waar het treintje op de kop hangt). Zie de foto hieronder.
- Teken zelf een looping op roosterpapier, stel hierbij bewegingsvergelijkingen op en bereken hierbij enkele snelheden.

Diagnostische toets

12.1 Goniometrische formules bij vergelijkingen en herleidingen

1 **a** Bereken exact de oplossingen van $\sin(3x - \frac{1}{4}\pi) = \cos(2x)$ in $[0, \pi]$.
b Bereken exact de oplossingen van $2\cos^2(2x) + \sin(2x) = 1$ in $[0, 2\pi]$.
c Bereken algebraïsch de oplossingen van $\cos(\frac{2}{5}\pi t) = -\sin(\frac{1}{6}\pi t)$ in $[0, 10]$.

2 Herleid tot de vorm $\sin(ax)$ of $\cos(ax)$.
a $\sin(\frac{1}{2}x)\cos(1\frac{1}{2}x) + \cos(\frac{1}{2}x)\sin(1\frac{1}{2}x)$
b $\sin(3x)\sin(5x) + \cos(3x)\cos(5x)$
c $2\sin(3x)\cos(3x)$
d $2\cos^2(5x) - 1$

3 Bereken exact de oplossingen.
a $\sin(x + \frac{1}{3}\pi) = 2\sin(2x)\cos(2x)$
b $\sin^2(2x) + \frac{1}{4} = \cos(4x)$

4 Herleid de formule $y = \sin^2(2x) + 2\cos^2(2x) + 3\cos(4x)$ tot de vorm $y = a + b\cos(cx)$.

12.2 Goniometrische formules bij symmetrie en primitiveren

5 **a** Bewijs dat de grafiek van de functie $f(x) = \sin(2x) + \cos(x)$ symmetrisch is in het punt $(1\frac{1}{2}\pi, 0)$.
b Bewijs dat de grafiek van de functie $f(x) = 2\sin^2(x)\cos(x)$ symmetrisch is in de lijn $x = \pi$.

6 Het vlakdeel V wordt ingesloten door de grafiek van de functie $f(x) = 2\sin(x)$ met domein $[0, \pi]$ en de x-as.
Bereken exact de inhoud van het lichaam L dat ontstaat als V wentelt om de x-as.

7 Gegeven is de functie $f(x) = 1 - 2\cos^2(x) - \cos(x)$ met domein $[0, \pi]$.
Bereken exact de oppervlakte van het vlakdeel V dat wordt ingesloten door de grafiek van f en de x-as.

12.3 Eenparige cirkelbewegingen en harmonische trillingen

8 Van de punten A en B zijn de bewegingsvergelijkingen

$$\begin{cases} x_A(t) = 2\cos(\tfrac{1}{2}t) \\ y_A(t) = 2\sin(\tfrac{1}{2}t) \end{cases} \text{ en } \begin{cases} x_B(t) = 3\cos(2t) \\ y_B(t) = 3\sin(2t) \end{cases}$$

met t de tijd in seconden en $0 \leq t \leq 4\pi$.

a Geef de maximale en de minimale afstand tussen A en B. Voor welke waarden van t worden deze afstanden bereikt?

Voor de afstand tussen A en B geldt $AB = \sqrt{13 - 12\cos(1\tfrac{1}{2}t)}$.

b Bewijs dit.

c Bereken exact voor welke t de afstand tussen A en B gelijk is aan $\sqrt{7}$.

9 Het punt P voert een harmonische trilling uit met amplitude 5 dm en frequentie 4 hertz. Op $t = 0$ wordt de evenwichtsstand stijgend gepasseerd.

a Stel de formule op die deze trilling beschrijft in de vorm $u = b\sin(ct)$.

b Hoeveel km legt het punt P af in één uur?

12.4 Bewegingsvergelijkingen met goniometrische formules

10 De baan van een punt P is gegeven door

$$\begin{cases} x_P(t) = \sin(3t) \\ y_P(t) = \cos(2t - \tfrac{1}{3}\pi) \end{cases} \text{ met } 0 \leq t \leq 1\tfrac{1}{2}\pi.$$

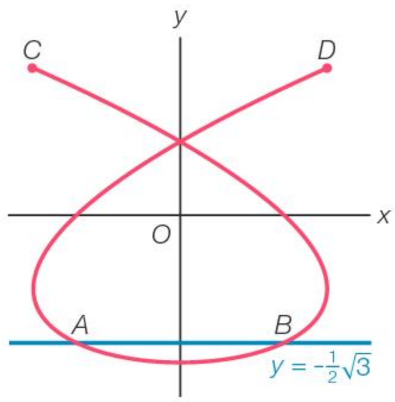
De baan snijdt de lijn $y = -\tfrac{1}{2}\sqrt{3}$ in de punten A en B en heeft de keerpunten C en D. Zie figuur 12.44.

a Bereken exact de lengte van lijnstuk AB.

b Bereken de coördinaten van de keerpunten van de baan.

c Bereken in graden de hoek φ waaronder de baan zichzelf op de y-as snijdt.

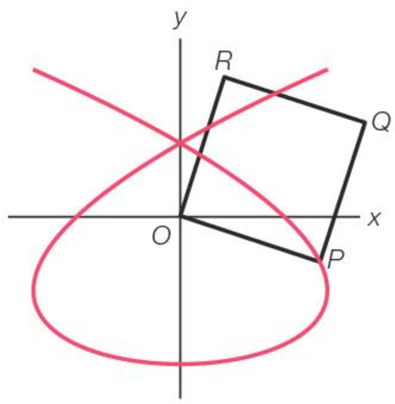
d Bereken exact de baansnelheid in het snijpunt met de negatieve y-as.



figuur 12.44

Het lijnstuk OP is de zijde van een vierkant $OPQR$ zoals in de figuur hiernaast.

e Stel de bewegingsvergelijkingen op van Q en bereken exact voor welke t de baan van Q de positieve x-as snijdt.



figuur 12.45

K

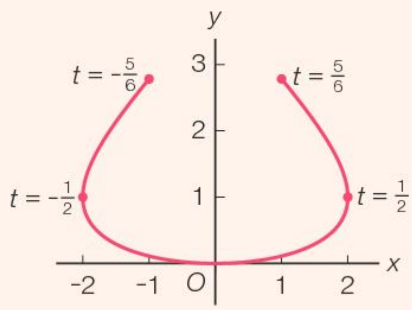
Voortgezette integraalrekening

Wat leer je?

- Primitieven berekenen met de substitutiemethode en met partieel integreren.
- Wat cyclometrische functies zijn.
- Hoe je met behulp van breuksplitsen primitieven kunt berekenen.
- Hoe je de oppervlakte berekent van een vlakdeel dat wordt ingesloten door een parameterkromme.

Beginopdracht De glaskunstenaar

Bij glasblazen worden glazen voorwerpen gemaakt door lucht te blazen in roodgloeiend vloeibaar gemaakt glas. Het is een moeilijke techniek waarvoor je veel geduld en aanleg moet hebben. Je hebt er ook een speciale opleiding voor nodig.
Er zijn kunstenaars die prachtige voorwerpen maken met behulp van glasblazen.
De bekendste hedendaagse glaskunstenaar is Dale Chihuly (http://www.chihuly.com).
Chihuly heeft een voorliefde voor vormen uit de natuur en plaatst zijn kunstwerken vaak in een natuurlijke omgeving.
Bekend zijn ook zijn manden waarvoor hij inspiratie opdeed bij de indianen.



We bekijken in deze opdracht zo'n mand van glas.
Het vooraanzicht van dit kunstwerk is een kromme die kan worden beschreven met de formules $x(t) = 2\sin(\pi t)$ en $y_p(t) = pt^2$ met x en y in dm, $p > 0$ en $-\frac{5}{6} \leq t \leq \frac{5}{6}$. Het vooraanzicht is symmetrisch in de y-as. In de figuur hiernaast zie je het vooraanzicht voor $p = 4$. Het vlakdeel dat ingesloten wordt door de kromme en de lijn die door de bovenkanten gaat noemen we V.
Het is mogelijk x uit te drukken in y. Voor $p = 4$ krijg je voor het deel van de kromme dat rechts van de y-as zit $x = 2\sin(\frac{1}{2}\pi\sqrt{y})$.
Voor $p = 4$ is de oppervlakte van V bij benadering gelijk aan 9,0 dm^2.

- Bereken deze oppervlakte in dm^2 waarbij je afrondt op twee decimalen.

Voor $p = 4$ is de inhoud van het lichaam L dat ontstaat als V om de y-as wentelt bij benadering gelijk aan 23,9 dm^3.

- Bereken deze inhoud in dm^3 waarbij je afrondt op twee decimalen.

De kunstenaar wil p zodanig kiezen dat de inhoud 50 dm^3 is.

- Laat met berekeningen zien dat p dan tussen 8 en 9 moet liggen en geef de waarde van p in één decimaal.

Voorkennis Afgeleiden en primitieven

Theorie A Regels voor het differentiëren

$f(x) = ax^n$ geeft $f'(x) = a \cdot nx^{n-1}$
$f(x) = c \cdot g(x)$ geeft $f'(x) = c \cdot g'(x)$
$f(x) = \mathrm{e}^x$ geeft $f'(x) = \mathrm{e}^x$
$f(x) = g^x$ geeft $f'(x) = g^x \cdot \ln(g)$
$f(x) = \ln(x)$ geeft $f'(x) = \frac{1}{x}$
$f(x) = {}^g\log(x)$ geeft $f'(x) = \frac{1}{x\ln(g)}$
$f(x) = \sin(x)$ geeft $f'(x) = \cos(x)$
$f(x) = \cos(x)$ geeft $f'(x) = -\sin(x)$
$f(x) = \tan(x)$ geeft $f'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$ en $f'(x) = 1 + \tan^2(x)$
$s(x) = f(x) + g(x)$ geeft $s'(x) = f'(x) + g'(x)$ (somregel)
$v(x) = f(x) - g(x)$ geeft $v'(x) = f'(x) - g'(x)$ (verschilregel)
$p(x) = f(x) \cdot g(x)$ geeft $p'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$ (productregel)
$q(x) = \frac{t(x)}{n(x)}$ geeft $q'(x) = \frac{n(x) \cdot t'(x) - t(x) \cdot n'(x)}{(n(x))^2}$ (quotiëntregel)
$f(x) = u(v(x))$ geeft $f'(x) = u'(v(x)) \cdot v'(x)$ (kettingregel)

1 Differentieer.

a $f(x) = \sqrt{6x+1}$
b $f(x) = \frac{4}{\sqrt{2x-1}}$
c $f(x) = \ln(x^2 + 2x)$
d $f(x) = 2^{4x-1}$
e $f(x) = \sin(x^2 - x)$
f $f(x) = \tan(4x - \frac{1}{3}\pi)$

2 Bereken de afgeleide.

a $f(x) = \mathrm{e}^x \sin(2x)$
b $f(x) = \frac{\ln(x)}{x^2+1}$
c $f(x) = \frac{1}{2}x^2\ln(x)$
d $f(x) = \frac{2^x + 1}{2^x}$
e $f(x) = 2x\tan(x)$
f $f(x) = \frac{4x+2}{\sqrt{2x+1}}$

Theorie B Regels voor het primitiveren

$f(x) = ax^n$ geeft $F(x) = a \cdot \frac{1}{n+1}x^{n+1} + c$ met $n \neq -1$

$f(x) = \mathrm{e}^x$ geeft $F(x) = \mathrm{e}^x + c$

$f(x) = g^x$ geeft $F(x) = \frac{g^x}{\ln(g)} + c$

$f(x) = \frac{1}{x}$ geeft $F(x) = \ln|x| + c$

$f(x) = \ln(x)$ geeft $F(x) = x\ln(x) - x + c$

$f(x) = {}^g\log(x)$ geeft $F(x) = \frac{1}{\ln(g)}(x\ln(x) - x) + c$

$f(x) = \sin(x)$ geeft $F(x) = -\cos(x) + c$

$f(x) = \cos(x)$ geeft $F(x) = \sin(x) + c$

De primitieven van $f(ax + b)$ zijn $\frac{1}{a}F(ax + b) + c$.

3 Primitiveer.

a $f(x) = x^2 + \sin(x)$

b $f(x) = \frac{x^2 - 2}{x^3}$

c $f(x) = 4 \cdot 3^x$

d $f(x) = \ln\left(\frac{2}{\sqrt{x}}\right)$

e $f(x) = 6 \cdot \log(3x)$

f $f(x) = \frac{4^x - 2^x + 1}{2^x}$

4 Primitiveer.

a $f(x) = \mathrm{e}^{\frac{1}{2}x - 1}$

b $f(x) = \frac{3}{2x - 1}$

c $f(x) = 4\sin(\pi x)$

d $f(x) = \frac{4x + 1}{2\sqrt{4x + 1}}$

e $f(x) = (\frac{1}{2})^{2x - 3}$

f $f(x) = 4\ln(x - 1)$

5 Bereken exact.

a $\int_{\frac{1}{6}\pi}^{\frac{1}{3}\pi} \sin(2x)\,\mathrm{d}x$

b $\int_1^4 \frac{6}{2x - 1}\,\mathrm{d}x$

c $\int_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^2} 10\ln(\sqrt[4]{x})\,\mathrm{d}x$

d $\int_0^4 6\,\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x - 3}\,\mathrm{d}x$

K.1 De substitutiemethode

01 Gegeven is de functie $f(x) = \sin(x^2 + x)$.

a Toon aan dat $f'(x) = (2x + 1)\cos(x^2 + x)$.

b Licht toe dat $G(x) = \sin(x^2 + x) + 3$ een primitieve is van $g(x) = (2x + 1)\cos(x^2 + x)$.

Theorie A Primitiveren en de kettingregel

De afgeleide van de functie $f(x) = (x^2 + x)^5$ bereken je met de kettingregel.
Je krijgt $f'(x) = 5(x^2 + x)^4(2x + 1)$.
Om de kettingregel te kunnen gebruiken bij het primitiveren van $g(x) = 5(x^2 + x)^4(2x + 1)$ gaan we omgekeerd te werk en noteren dit als volgt.

$$\int 5(x^2 + x)^4(2x + 1)\,\mathrm{d}x = \int 5(x^2 + x)^4\,\mathrm{d}(x^2 + x) = \int 5(v(x))^4\,\mathrm{d}v(x)$$
$$= (v(x))^5 + c = (x^2 + x)^5 + c$$

$f(x) = (x^2 + x)^5 = (v(x))^5$ met $v(x) = x^2 + x$.

In dit hoofdstuk gebruiken we u in plaats van $v(x)$.
De notatie wordt dan

$$\int 5(x^2 + x)^4(2x + 1)\,\mathrm{d}x = \int 5(x^2 + x)^4\,\mathrm{d}(x^2 + x) = \int 5u^4\,\mathrm{d}u$$
$$= u^5 + c = (x^2 + x)^5 + c.$$

Omdat $\frac{\mathrm{d}(x^2 + x)}{\mathrm{d}x} = 2x + 1$ is in de herleiding gebruikt dat $(2x + 1)\,\mathrm{d}x$ gelijk is aan $\mathrm{d}(x^2 + x)$.

$f'(x)$ wordt ook genoteerd als $\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}$.
$f'(x) = \frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}$ dus $f'(x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}f(x)$.

In de berekening hierboven is het integraalteken zonder grenzen gebruikt. Zo'n integraal heet een **onbepaalde integraal**.
Een integraal met grenzen heet een *bepaalde integraal*.

De functie g is geprimitiveerd met de **substitutiemethode**.
'Substitueren' betekent zoals je weet 'vervangen door'.
Bij de functie g is $x^2 + x$ vervangen door u en daarmee lukte het primitiveren.

Is u een functie van x dan geldt

$$\int f(u) \cdot u'\,\mathrm{d}x = \int f(u)\,\mathrm{d}u = F(u) + c.$$

Voorbeeld

a Primitiveer $f(x) = 6x(x^2 + 1)^5$.

b Primitiveer $g(x) = \dfrac{10x^3}{\sqrt{x^4 + 7}}$.

Aanpak

a Merk op dat $\dfrac{d(x^2 + 1)}{dx} = 2x$. Schrijf daarom $6x$ als $3 \cdot 2x$.

b Merk op dat $\dfrac{d(x^4 + 7)}{dx} = 4x^3$. Schrijf daarom $10x^3$ als $2\frac{1}{2} \cdot 4x^3$.

Uitwerking

a $F(x) = \int 6x(x^2 + 1)^5\,dx = \int 3 \cdot (x^2 + 1)^5 \cdot 2x\,dx = \int 3(x^2 + 1)^5\,d(x^2 + 1)$

$= \int 3u^5\,du = \frac{1}{2}u^6 + c = \frac{1}{2}(x^2 + 1)^6 + c$

b $G(x) = \int \dfrac{10x^3}{\sqrt{x^4 + 7}}\,dx = \int 2\frac{1}{2} \cdot (x^4 + 7)^{-\frac{1}{2}} \cdot 4x^3\,dx = \int 2\frac{1}{2}(x^4 + 7)^{-\frac{1}{2}}\,d(x^4 + 7)$

$= \int 2\frac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}}\,du = 5u^{\frac{1}{2}} + c = 5\sqrt{u} + c = 5\sqrt{x^4 + 7} + c$

R2 Zie het voorbeeld.

a Waarom lukt het primitiveren van $f(x) = 6x(x^2 + 1)^5$ wel op deze manier en het primitiveren van $h(x) = 6x(x^3 + 1)^5$ niet?

b Waarom lukt het primitiveren van $g(x) = \dfrac{10x^3}{\sqrt{x^4 + 7}}$ wel op deze manier en het primitiveren van $k(x) = \dfrac{10x^3}{\sqrt{x^4 + x}}$ niet?

c Voor welke waarde van a lukt het primitiveren van $l(x) = \dfrac{10x^3 + a}{\sqrt{x^4 + x}}$?

3 In de uitwerking van voorbeeld b staat $4x^3\,dx = d(x^4 + 7)$. En zo is bijvoorbeeld $\sin(x)\,dx = d(-\cos(x) + 2)$.
Vul in.

a $3x^2\,dx = d(... + 5)$

b $...\,dx = d(x^5 - 3)$

c $\cos(2x)\,dx = d(... + \pi)$

d $...\,dx = d\ln(x)$

e $(5 - 2x)\,dx = d(... + 5)$

f $...\,dx = d\frac{1}{2}\sin(4x)$

4 Primitiveer.

a $f(x) = 2x(x^2 + 4)^3$

b $g(x) = 6x\sqrt{x^2 + 1}$

c $h(x) = 6x^2(x^3 - 1)^4$

d $j(x) = 3x^2\sin(x^3 - 1)$

5 Primitiveer.

a $f(x) = x(3x^2 - 4)^3$

b $f(x) = 2x\sqrt{x^2 - 3}$

c $f(x) = \dfrac{6x}{3x^2 + 2}$

d $f(x) = x\ln(x^2 + 1)$

A6 Primitiveer.

a $f(x) = \dfrac{\ln(x)}{x}$

b $g(x) = x\mathrm{e}^{-x^2}$

c $h(x) = x\sqrt{5 - x^2}$

d $j(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$

A7 Het vlakdeel V_p wordt ingesloten door de grafiek van de functie $f(x) = \frac{1}{10}\sqrt{3x} \cdot \mathrm{e}^{x^2}$, de x-as en de lijn $x = p$.
Het lichaam L_p ontstaat als V_p wentelt om de x-as.
Bereken exact voor welke p de inhoud van L_p gelijk is aan $3\frac{3}{10}\pi$.
Schrijf het antwoord in de vorm $p = \sqrt{\ln(a)}$.

O8 Gegeven is de functie $f(x) = \tan(x)$.
Om de functie f te primitiveren, noteren we deze als

$f(x) = \dfrac{1}{\cos(x)} \cdot \sin(x)$.

a Licht toe dat deze notatie juist is.

b Licht toe dat $\int \tan(x)\,\mathrm{d}x = \int \dfrac{-1}{\cos(x)}\,\mathrm{d}\cos(x)$.

Theorie B Toepassingen van de substitutiemethode

Om de functie $f(x) = \tan(x)$ te primitiveren, gebruik je $\tan(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$ en de substitutiemethode.

$$F(x) = \int \tan(x)\,\mathrm{d}x = \int \frac{\sin(x)}{\cos(x)}\,\mathrm{d}x = \int \frac{-1}{\cos(x)} \cdot -\sin(x)\,\mathrm{d}x$$
$$= \int -\frac{1}{\cos(x)}\,\mathrm{d}\cos(x) = \int -\frac{1}{u}\,\mathrm{d}u = -\ln|u| + c = -\ln|\cos(x)| + c$$

$f(x) = \tan(x)$ geeft $F(x) = -\ln|\cos(x)| + c$

Ook de functie $g(x) = \sin^3(x)$ is te primitiveren met de substitutiemethode.
Hiertoe herleid je $\sin^3(x)$ tot $(\cos^2(x) - 1) \cdot -\sin(x)$.

$$G(x) = \int \sin^3(x)\,\mathrm{d}x = \int \sin^2(x) \cdot \sin(x)\,\mathrm{d}x = \int -(1 - \cos^2(x)) \cdot -\sin(x)\,\mathrm{d}x$$
$$= \int (\cos^2(x) - 1)\,\mathrm{d}\cos(x) = \int (u^2 - 1)\,\mathrm{d}u = \tfrac{1}{3}u^3 - u + c$$
$$= \tfrac{1}{3}\cos^3(x) - \cos(x) + c$$

In het voorbeeld hieronder wordt $\int_{\frac{1}{6}\pi}^{\frac{1}{4}\pi} \cos^3(x)\,dx$ met de substitutiemethode berekend. De grenzen $\frac{1}{6}\pi$ en $\frac{1}{4}\pi$ horen bij de variabele x.
Nadat is overgestapt op de variabele $u = \sin(x)$ moeten de grenzen van u bij de integraal worden genoteerd.
Omdat $\sin(\frac{1}{6}\pi) = \frac{1}{2}$ en $\sin(\frac{1}{4}\pi) = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ horen bij u de grenzen $\frac{1}{2}$ en $\frac{1}{2}\sqrt{2}$.

In de tussenstap met $\int (1 - \sin^2(x))\,d\sin(x)$ schrijven we bij de integraal de grenzen $x = \frac{1}{6}\pi$ en $x = \frac{1}{4}\pi$. Dat is korter dan bij de grenzen te noteren $\sin(x) = \frac{1}{2}$ en $\sin(x) = \frac{1}{2}\sqrt{2}$.

Voorbeeld

Bereken exact.

a $\int_0^{\frac{1}{9}\pi} \tan(3x)\,dx$

b $\int_{\frac{1}{6}\pi}^{\frac{1}{4}\pi} \cos^3(x)\,dx$

$$\int_p^q f(ax+b)\,dx = \left[\frac{1}{a}F(ax+b)\right]_p^q$$

Uitwerking

a $\int_0^{\frac{1}{9}\pi} \tan(3x)\,dx = \left[-\frac{1}{3}\ln|\cos(3x)|\right]_0^{\frac{1}{9}\pi} = -\frac{1}{3}\ln|\cos(\frac{1}{3}\pi)| + \frac{1}{3}\ln|\cos(0)|$

$= -\frac{1}{3}\ln(\frac{1}{2}) + \frac{1}{3}\ln(1) = -\frac{1}{3}\ln(2^{-1}) + 0 = \frac{1}{3}\ln(2)$

b $\int_{\frac{1}{6}\pi}^{\frac{1}{4}\pi} \cos^3(x)\,dx = \int_{\frac{1}{6}\pi}^{\frac{1}{4}\pi} \cos^2(x)\cdot\cos(x)\,dx = \int_{x=\frac{1}{6}\pi}^{x=\frac{1}{4}\pi} (1 - \sin^2(x))\,d\sin(x)$

$= \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}\sqrt{2}} (1 - u^2)\,du = \left[u - \frac{1}{3}u^3\right]_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}\sqrt{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2} - \frac{1}{3}\cdot(\frac{1}{2}\sqrt{2})^3 - (\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\cdot(\frac{1}{2})^3)$

$= \frac{1}{2}\sqrt{2} - \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{8}\cdot 2\sqrt{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{8} = \frac{5}{12}\sqrt{2} - \frac{11}{24}$

9 Bereken exact.

a $\int_0^{\frac{1}{6}\pi} \tan(2x)\,dx$ **b** $\int_{\frac{1}{4}\pi}^{\frac{1}{3}\pi} \sin^3(x)\,dx$ **c** $\int_0^{\frac{1}{6}\pi} \frac{\sin(x)}{\cos^3(x)}\,dx$

A10 Primitiveer.

a $f(x) = \cos(x) - \dfrac{\cos(x)}{\sin^2(x)}$

b $g(x) = \sin^5(x)$

A11 Bereken exact.

a $\displaystyle\int_1^2 \frac{\ln^2(x)}{x}\,dx$

b $\displaystyle\int_e^{e^2} \frac{1}{x\ln(x)}\,dx$

c $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2}{e^{2x^3}}\,dx$

12 Om $\displaystyle\int_0^5 x\sqrt{x+4}\,dx$ te berekenen met de substitutiemethode stel je $\sqrt{x+4} = u$.

a Licht toe dat bij $x = 0$ hoort $u = 2$ en bereken de waarde van u die bij $x = 5$ hoort.

b Licht toe dat uit $\sqrt{x+4} = u$ volgt $x = u^2 - 4$ en dat $\int x\sqrt{x+4}\,dx$ hiermee te schrijven is als $\int (u^2 - 4) \cdot u\,d(u^2 - 4)$.

c Toon aan dat $\int (u^2 - 4) \cdot u\,d(u^2 - 4) = \int (2u^4 - 8u^2)\,du$.

d Bereken exact $\displaystyle\int_0^5 x\sqrt{x+4}\,dx$.

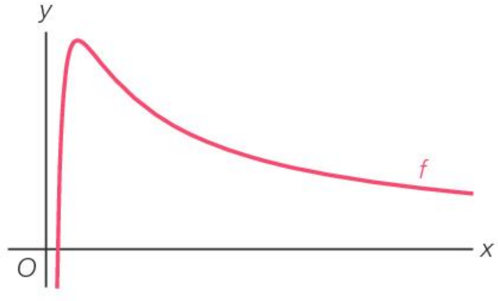
13 **a** Bereken exact $\displaystyle\int_0^3 x\sqrt{x+1}\,dx$ met behulp van de substitutie $\sqrt{x+1} = u$.

b Bereken exact $\displaystyle\int_0^7 \frac{5x}{\sqrt{x+9}}\,dx$ met behulp van de substitutie $\sqrt{x+9} = u$.

14 Gegeven is de functie $f(x) = \dfrac{2 + \ln(x)}{x}$.

a Bereken exact de oppervlakte van het vlakdeel V dat ingesloten wordt door de grafiek van f, de x-as en de lijn $x = e$.

b De oppervlakte van het vlakdeel dat ingesloten wordt door de grafiek van f, de x-as en de lijnen $x = 1$ en $x = p$ met $p > 1$ is gelijk aan 6.
Bereken exact de waarde van p.

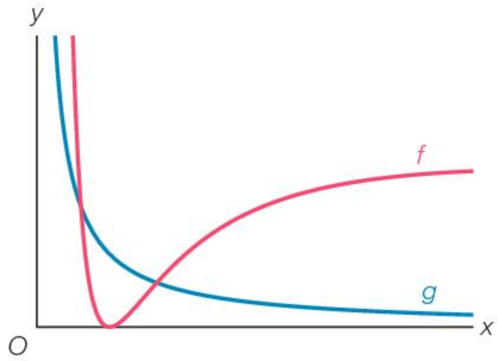


figuur K.1

A15 Gegeven zijn de functies $f(x) = \dfrac{4\ln^2(x)}{x}$ en $g(x) = \dfrac{1}{x}$.

a Los exact op $f(x) \le g(x)$.

b Bereken exact de oppervlakte van het vlakdeel V dat wordt ingesloten door de grafieken van f en g.

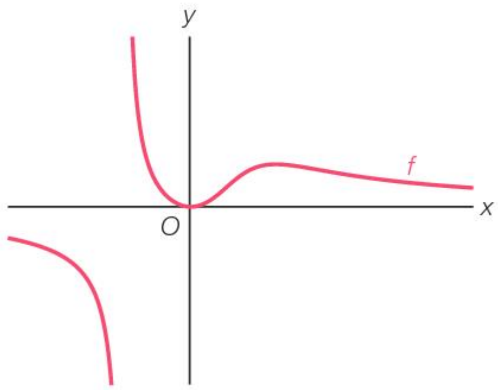


figuur K.2

A16 Gegeven is de functie $f(x) = \dfrac{3x^2}{x^3 + 4}$.

a Bereken exact voor welke p de vergelijking $f(x) = p$ precies drie oplossingen heeft.

b De oppervlakte van het vlakdeel dat wordt ingesloten door de grafiek van f, de x-as en de lijn $x = p$ met $p > 0$ is gelijk aan 2.
Bereken exact de waarde van p.



figuur K.3

Terugblik

De substitutiemethode

Is u een functie van x dan geldt $\int f(u) \cdot u' \mathrm{d}x = \int f(u) \mathrm{d}u = F(u) + c$.
De integraal zonder grenzen die hierin is gebruikt heet een onbepaalde integraal.
Met de substitutiemethode (de omgekeerde kettingregel) kun je primitieven vinden van de functie $f(x) = 4x\sqrt{x^2 + 1}$ omdat
$\int 4x \, \mathrm{d}x = \int 2 \, \mathrm{d}(x^2 + 1)$.

Het primitiveren gaat als volgt.

$$F(x) = \int 4x\sqrt{x^2 + 1} \, \mathrm{d}x = \int 2\sqrt{x^2 + 1} \, \mathrm{d}(x^2 + 1) = \int 2\sqrt{u} \, \mathrm{d}u = \int 2u^{\frac{1}{2}} \, \mathrm{d}u$$
$$= 2 \cdot \tfrac{2}{3}u^{1\frac{1}{2}} + c = \tfrac{4}{3}u\sqrt{u} + c = \tfrac{4}{3}(x^2 + 1)\sqrt{x^2 + 1} + c$$

Met de substitutiemethode is bewezen dat
$f(x) = \tan(x)$ geeft $F(x) = -\ln|\cos(x)| + c$.

Bij het primitiveren van de functie $f(x) = \tan(\frac{1}{2}x)$ gebruik je bovendien de regel $f(ax + b)$ geeft $\dfrac{1}{a}F(ax + b) + c$.
Dus $f(x) = \tan(\frac{1}{2}x)$ geeft $F(x) = -2\ln|\cos(\frac{1}{2}x)| + c$.

Integralen met de substitutiemethode

De integralen $\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin^4(x) \cdot \cos(x) \, \mathrm{d}x$ en $\int_0^1 x^2 \ln(x^3 + 1) \, \mathrm{d}x$ bereken je exact met de substitutiemethode.

Bij $\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin^4(x) \cdot \cos(x) \, \mathrm{d}x$ krijg je

$$\int_{x=0}^{x=\frac{1}{2}\pi} \sin^4(x) \, \mathrm{d}\sin(x) = \int_0^1 u^4 \, \mathrm{d}u = \left[\tfrac{1}{5}u^5\right]_0^1 = \tfrac{1}{5} \cdot 1 - \tfrac{1}{5} \cdot 0 = \tfrac{1}{5}.$$

$x = 0$ en $u = \sin(x)$
geeft $u = 0$

$x = \frac{1}{2}\pi$ en $u = \sin(x)$
geeft $u = 1$

Bij $\int_0^1 x^2 \ln(x^3 + 1) \, \mathrm{d}x$ krijg je

$$\int_0^1 \tfrac{1}{3} \cdot \ln(x^3 + 1) \cdot 3x^2 \mathrm{d}x = \int_{x=0}^{x=1} \tfrac{1}{3}\ln(x^3 + 1) \, \mathrm{d}(x^3 + 1) =$$

$$\int_1^2 \tfrac{1}{3}\ln(u) \, \mathrm{d}u = \left[\tfrac{1}{3}(u\ln(u) - u)\right]_1^2 =$$

$$\tfrac{1}{3}(2\ln(2) - 2) - \tfrac{1}{3}(1 \cdot \ln(1) - 1) = \tfrac{2}{3}\ln(2) - \tfrac{1}{3}.$$

$x = 0$ en $u = x^3 + 1$
geeft $u = 1$

$x = 1$ en $u = x^3 + 1$
geeft $u = 2$

K.2 Partieel integreren

017 In deze opgave ontdek je wat een primitieve is van de functie $h(x) = (2x + 3)\cos(x)$.
Bekijk daartoe de functie $k(x) = (2x + 3)\sin(x)$.
Er geldt $k'(x) = 2\sin(x) + (2x + 3)\cos(x)$.

a Toon dit aan en licht toe dat hieruit volgt dat de functie k geen primitieve is van de functie h.

Uit $k'(x) = 2\sin(x) + (2x + 3)\cos(x)$ volgt $(2x + 3)\cos(x) = k'(x) - 2\sin(x)$
en dit geeft $\int (2x + 3)\cos(x)\,\mathrm{d}x = (2x + 3)\sin(x) - \int 2\sin(x)\,\mathrm{d}x$.

b Licht dit toe.

c Primitiveer $h(x) = (2x + 3)\cos(x)$.

Theorie A Primitiveren en de productregel

Uit de productregel voor het differentiëren
$[f(x) \cdot g(x)]' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$ volgt

$$\int [f(x) \cdot g(x)]'\,\mathrm{d}x = \int f'(x) \cdot g(x)\,\mathrm{d}x + \int f(x) \cdot g'(x)\,\mathrm{d}x$$

$$f(x) \cdot g(x) = \int f'(x) \cdot g(x)\,\mathrm{d}x + \int f(x) \cdot g'(x)\,\mathrm{d}x$$

$$\int f(x) \cdot g'(x)\,\mathrm{d}x = f(x) \cdot g(x) - \int f'(x) \cdot g(x)\,\mathrm{d}x$$

$$\int f(x)\,\mathrm{d}g(x) = f(x) \cdot g(x) - \int g(x)\,\mathrm{d}f(x)$$

$$\int [f(x) \cdot g(x)]'\,\mathrm{d}x = f(x) \cdot g(x)$$

$$\boldsymbol{\int f(x)\,\mathrm{d}g(x) = f(x) \cdot g(x) - \int g(x)\,\mathrm{d}f(x)}$$

De regel hierboven pas je toe bij integralen van de vorm $\int f(x) \cdot g'(x)\,\mathrm{d}x$.

Je krijgt $\int f \cdot g'\,\mathrm{d}x = \int f\,\mathrm{d}g = f \cdot g - \int g\,\mathrm{d}f = f \cdot g - \int g \cdot f'\,\mathrm{d}x$.

Je ziet dat eerst een van de factoren wordt geprimitiveerd.
Hierboven is dat gedaan door $g'\mathrm{d}x$ te vervangen door $\mathrm{d}g$.
Daarom heet deze methode **partieel primitiveren** of **partieel integreren**.

Gebruik je de regel van de vorige bladzijde voor het partieel integreren bij de functie $h(x) = (2x + 3)\cos(x)$ dan krijg je

$$\begin{aligned} H(x) &= \int \underbrace{(2x+3)}_{f}\,\underbrace{\cos(x)\,\mathrm{d}x}_{g'\mathrm{d}x} = \int \underbrace{(2x+3)}_{f}\,\underbrace{\mathrm{d}\sin(x)}_{\mathrm{d}g} \\ &= \underbrace{(2x+3)}_{f}\,\underbrace{\sin(x)}_{g} - \int \underbrace{\sin(x)}_{g}\,\underbrace{\mathrm{d}(2x+3)}_{\mathrm{d}f} \\ &= \underbrace{(2x+3)}_{f}\,\underbrace{\sin(x)}_{g} - \int \underbrace{\sin(x)}_{g} \cdot \underbrace{2\mathrm{d}x}_{f'\mathrm{d}x} = (2x+3)\sin(x) + 2\cos(x) + c. \end{aligned}$$

Het primitiveren van $h(x) = (2x + 3)\cos(x)$ lukt met partieel integreren omdat de primitieve van $y = \cos(x)$ niet moeilijker is dan $y = \cos(x)$ zelf, terwijl de afgeleide van $y = 2x + 3$ simpeler is dan $y = 2x + 3$.
Bij het partieel integreren krijg je te maken met het product van de primitieve van $y = \cos(x)$ en de afgeleide van $y = 2x + 3$, dus met $y = 2\sin(x)$ en deze functie is eenvoudig te primitiveren.

Werkschema: partieel integreren

1 Noem de functie om eerst te primitiveren g' en de andere functie f.

2 Herleid $\int f \cdot g'\mathrm{d}x$ tot $\int f\,\mathrm{d}g$.

3 Gebruik $\int f\,\mathrm{d}g = fg - \int g\,\mathrm{d}f = fg - \int g \cdot f'\mathrm{d}x$.

4 Bereken $fg - \int g \cdot f'\mathrm{d}x$.

Partieel primitiveren lukt niet altijd.
Tijdens het primitiveren kun je het vermoeden krijgen dat je de verkeerde functie g' hebt genoemd. Begin dan opnieuw met de andere functie.

Voorbeeld

Bereken $\int \frac{\ln(x)}{x\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$.

Uitwerking

$$\begin{aligned} \int \frac{\ln(x)}{x\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x &= \int \underbrace{\ln(x)}_{f} \cdot \underbrace{x^{-1\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x}_{g'\mathrm{d}x} = \int \underbrace{\ln(x)}_{f} \cdot \underbrace{\mathrm{d}\,{-2x^{-\frac{1}{2}}}}_{\mathrm{d}g} \\ &= \underbrace{\ln(x)}_{f} \cdot \underbrace{-2x^{-\frac{1}{2}}}_{g} - \int \underbrace{-2x^{-\frac{1}{2}}}_{g}\,\underbrace{\mathrm{d}\ln(x)}_{\mathrm{d}f} = -\frac{2\ln(x)}{\sqrt{x}} + \int 2x^{-\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \\ &= -\frac{2\ln(x)}{\sqrt{x}} + \int 2x^{-1\frac{1}{2}}\mathrm{d}x = -\frac{2\ln(x)}{\sqrt{x}} - 4x^{-\frac{1}{2}} + c \\ &= \frac{-2\ln(x) - 4}{\sqrt{x}} + c \end{aligned}$$

In het voorbeeld hieronder zie je hoe je een bepaalde integraal noteert die met partieel integreren wordt berekend. Je ziet dat eerst de onbepaalde integraal wordt berekend en dat daarna de grenzen worden ingevuld.

Voorbeeld

Bereken exact $\int_{\frac{1}{6}\pi}^{\frac{1}{2}\pi} x\sin(x)\,\mathrm{d}x$.

Uitwerking

$\int x\sin(x)\,\mathrm{d}x = \int x\,\mathrm{d}(-\cos(x)) = -x\cos(x) - \int -\cos(x)\,\mathrm{d}x = -x\cos(x) + \sin(x) + c$

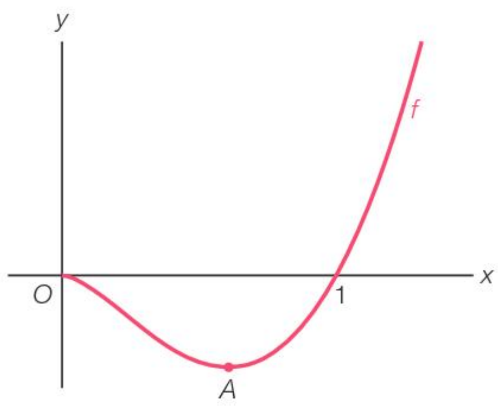
Dus $\int_{\frac{1}{6}\pi}^{\frac{1}{2}\pi} x\sin(x)\,\mathrm{d}x = \left[-x\cos(x) + \sin(x)\right]_{\frac{1}{6}\pi}^{\frac{1}{2}\pi} = -\frac{1}{2}\pi \cdot 0 + 1 - (-\frac{1}{6}\pi \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{1}{2}) = \frac{1}{2} + \frac{1}{12}\pi\sqrt{3}$.

R18
a Zie het eerste voorbeeld.
Bewijs met partieel integreren dat $\int \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = 2\sqrt{x}(\ln(x) - 2) + c$.
b Zie het tweede voorbeeld.
Onderzoek of het primitiveren van $h(x) = x\sin(x)$ ook lukt als je eerst de factor x primitiveert.
c Bereken met behulp van partieel integreren de primitieven van $f(x) = \ln(x)$.

19 Primitiveer.
a $f(x) = x\,\mathrm{e}^{2x}$
b $f(x) = 2x\cos(x)$
c $f(x) = x\ln(x)$
d $f(x) = x^3\ln(x) + 3$

20 Bereken exact.
a $\int_0^1 2x\,\mathrm{e}^{x+1}\,\mathrm{d}x$
b $\int_0^{\pi} (3x+1)\sin(x)\,\mathrm{d}x$

21 In figuur K.4 is de grafiek van de functie $f(x) = x^2\ln(x)$ getekend.
a Bereken exact de coördinaten van de top A.
b Bereken exact de oppervlakte van het vlakdeel V dat wordt ingesloten door de grafiek van f, de x-as en de lijn $x = \mathrm{e}$.



figuur K.4

A22 Gegeven is de functie $f(x) = \dfrac{\ln(x)}{x^2}$.

a Bereken exact het bereik van f.

b Bereken exact de oppervlakte van het vlakdeel V dat wordt ingesloten door de grafiek van f, de x-as en de lijn $x = \mathrm{e}$.

O23 Gegeven is de functie $f(x) = x^2\mathrm{e}^x$.

a Toon aan dat $\int x^2\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = x^2\mathrm{e}^x - \int 2x\,\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$.

b Toon aan dat $\int 2x\,\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = 2x\,\mathrm{e}^x - 2\,\mathrm{e}^x + c$.

c Licht toe dat uit a en b volgt dat de primitieven van f zijn $F(x) = (x^2 - 2x + 2)\,\mathrm{e}^x + c$.

Merk op dat de constante c in opgave 23b een andere is dan de constante c in opgave 23c.
We gebruiken gemakshalve de letter c voor elke constante.

Theorie B Herhaald partieel integreren

In opgave 23 heb je gezien dat je een primitieve van de functie $f(x) = x^2\mathrm{e}^x$ kunt vinden door twee keer partieel te integreren. Na één keer partieel integreren kreeg je $\int x^2\mathrm{e}^x\mathrm{d}x = x^2\mathrm{e}^x - \int 2x\,\mathrm{e}^x\mathrm{d}x$ en het berekenen van $\int 2x\,\mathrm{e}^x\mathrm{d}x$ leverde $\int 2x\,\mathrm{e}^x\mathrm{d}x = 2x\,\mathrm{e}^x - 2\,\mathrm{e}^x + c$.
Dus $\int x^2\mathrm{e}^x\mathrm{d}x = x^2\mathrm{e}^x - 2x\,\mathrm{e}^x + 2\,\mathrm{e}^x + c$ en dit geeft de primitieven $F(x) = (x^2 - 2x + 2)\,\mathrm{e}^x + c$.

Om de functie $g(x) = \mathrm{e}^x\sin(x)$ te primitiveren pas je ook twee keer partieel integreren toe.

$$\begin{aligned}
\int \mathrm{e}^x\sin(x)\,\mathrm{d}x &= \int \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}(-\cos(x))\\
&= -\mathrm{e}^x\cos(x) - \int -\cos(x)\,\mathrm{d}\mathrm{e}^x\\
&= -\mathrm{e}^x\cos(x) + \int \mathrm{e}^x\cos(x)\,\mathrm{d}x\\
&= -\mathrm{e}^x\cos(x) + \int \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}\sin(x)\\
&= -\mathrm{e}^x\cos(x) + \mathrm{e}^x\sin(x) - \int \sin(x)\,\mathrm{d}\mathrm{e}^x\\
&= -\mathrm{e}^x\cos(x) + \mathrm{e}^x\sin(x) - \int \mathrm{e}^x\sin(x)\,\mathrm{d}x\\
&= \mathrm{e}^x\sin(x) - \mathrm{e}^x\cos(x) - \int \mathrm{e}^x\sin(x)\,\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

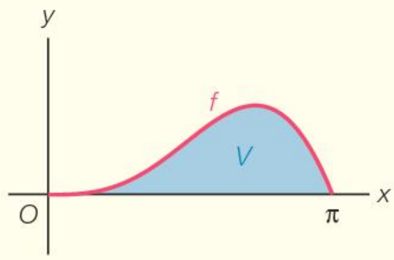
Dus $\int \mathrm{e}^x\sin(x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^x\sin(x) - \mathrm{e}^x\cos(x) - \int \mathrm{e}^x\sin(x)\,\mathrm{d}x$.
Hieruit volgt $2\int \mathrm{e}^x\sin(x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^x\sin(x) - \mathrm{e}^x\cos(x)$ oftewel

$$\int \mathrm{e}^x\sin(x)\,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{2}\mathrm{e}^x\sin(x) - \tfrac{1}{2}\mathrm{e}^x\cos(x).$$

Dus de primitieven van $g(x) = \mathrm{e}^x\sin(x)$ zijn $G(x) = \tfrac{1}{2}\mathrm{e}^x(\sin(x) - \cos(x)) + c$.
Je ziet dat twee keer partieel integreren niet direct een primitieve oplevert, maar wel een vorm waaruit een primitieve is af te leiden.

Voorbeeld

Gegeven is de functie $f(x) = x^2 \sin(x)$ met $D_f = [0, \pi]$.
Zie figuur K.5.
Bereken exact de oppervlakte van het vlakdeel V dat wordt ingesloten door de grafiek van f en de x-as.



figuur K.5

Uitwerking

$$\begin{aligned}\int x^2 \sin(x)\,\mathrm{d}x &= \int x^2\,\mathrm{d}(-\cos(x)) = x^2 \cdot -\cos(x) + \int \cos(x)\,\mathrm{d}x^2\\ &= -x^2\cos(x) + \int 2x\cos(x)\,\mathrm{d}x\\ &= -x^2\cos(x) + \int 2x\,\mathrm{d}\sin(x)\\ &= -x^2\cos(x) + 2x\sin(x) - \int \sin(x)\,\mathrm{d}\,2x\\ &= -x^2\cos(x) + 2x\sin(x) - \int 2\sin(x)\,\mathrm{d}x\\ &= -x^2\cos(x) + 2x\sin(x) + 2\cos(x) + c\end{aligned}$$

$\int 2x\cos(x)\,\mathrm{d}x$ is eenvoudiger dan $\int x^2 \sin(x)\,\mathrm{d}x$, dus doorgaan met partieel integreren.

$$O(V) = \int_0^{\pi} x^2 \sin(x)\,\mathrm{d}x = \left[-x^2\cos(x) + 2x\sin(x) + 2\cos(x)\right]_0^{\pi}$$
$$= -\pi^2 \cdot -1 + 2\pi \cdot 0 + 2 \cdot -1 - (0 + 0 + 2) = \pi^2 - 4$$

R24

In de theorie is berekend dat $F(x) = (x^2 - 2x + 2)\,\mathrm{e}^x$ een primitieve is van $f(x) = x^2\,\mathrm{e}^x$. Dit is een voorbeeld van de algemene regel
$F(x) = (ax^2 + bx + c)\,\mathrm{e}^x$ is een primitieve van $f(x) = (ax^2 + px + q)\,\mathrm{e}^x$.

a Bewijs deze regel door de afgeleide te nemen van F en druk p en q uit in a, b en c.

b Bereken met deze regel de primitieven van $f(x) = (4x^2 - 5x + 6)\,\mathrm{e}^x$.

R25

a Zie de theorie met $\int \mathrm{e}^x \sin(x)\,\mathrm{d}x$.
Primitiveer $g(x) = \mathrm{e}^x \sin(x)$ door eerst e^x te primitiveren.

b Zie het voorbeeld.
Controleer de primitieve van f met behulp van differentiëren.

26

Primitiveer.

a $f(x) = \frac{1}{4}x^2\cos(x)$

b $g(x) = \mathrm{e}^{-x}\cos(x)$

c $h(x) = \mathrm{e}^{2x}\sin(x)$

d $k(x) = \ln^2(x)$

27 Bereken exact.

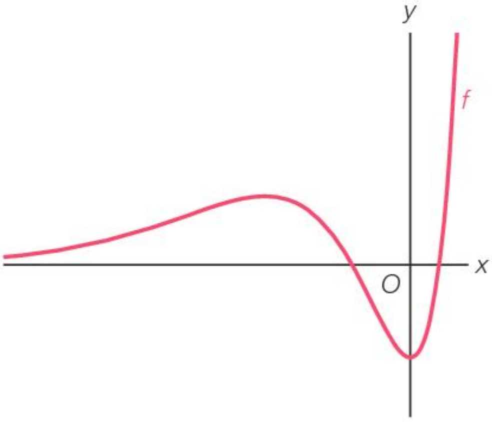
a $\int_1^3 (x^2 - x)\,\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$

b $\int_1^{\mathrm{e}} x \ln^2(x)\,\mathrm{d}x$

A28 Gegeven is de functie $f(x) = (2x^2 + x - 1)\,\mathrm{e}^x$.
Zie figuur K.6.

a Bereken exact de extreme waarden van f.

b Bereken exact de oppervlakte van het vlakdeel V dat wordt ingesloten door de grafiek van f en de x-as.

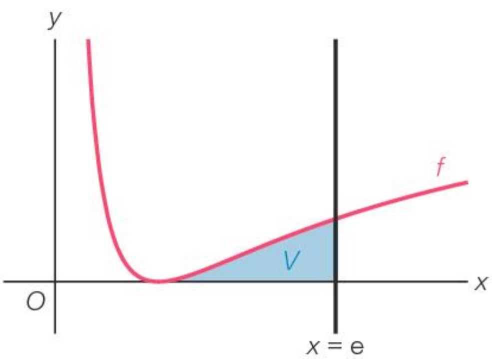


figuur K.6

A29 Gegeven is de functie $f(x) = \dfrac{\ln^2(x)}{\sqrt{x}}$.
Het vlakdeel V wordt ingesloten door de grafiek van f, de x-as en de lijn $x = \mathrm{e}$.
Bereken exact

a de oppervlakte van V

b de inhoud van het lichaam L dat ontstaat als V om de x-as wentelt.



figuur K.7

Terugblik

Partieel integreren

Partieel integreren (de omgekeerde productregel) kun je gebruiken om een primitieve te zoeken van de functie $f(x) \cdot g'(x)$. Je herleidt

$\int f(x) \cdot g'(x)\,\mathrm{d}x$ tot $\int f(x)\,\mathrm{d}g(x)$ en gebruikt de productregel in de vorm

$\int f\,\mathrm{d}g = fg - \int g\,\mathrm{d}f.$

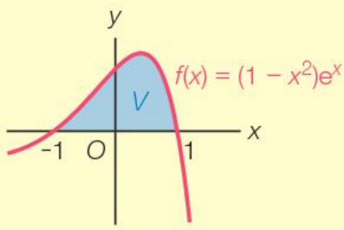
Daarna herleid je $fg - \int g\,\mathrm{d}f$ tot de vorm $fg - \int g \cdot f'\,\mathrm{d}x$.

Bij het primitiveren van $h(x) = 4x\,\mathrm{e}^{3x}$ krijg je

$$H(x) = \int 4x\,\mathrm{e}^{3x}\,\mathrm{d}x = \int \tfrac{4}{3}x\,\mathrm{d}\,\mathrm{e}^{3x} = \tfrac{4}{3}x \cdot \mathrm{e}^{3x} - \int \mathrm{e}^{3x}\,\mathrm{d}\tfrac{4}{3}x = \tfrac{4}{3}x\,\mathrm{e}^{3x} - \int \tfrac{4}{3}\,\mathrm{e}^{3x}\,\mathrm{d}x$$
$$= \tfrac{4}{3}x\,\mathrm{e}^{3x} - \tfrac{4}{9}\,\mathrm{e}^{3x} + c = \tfrac{4}{9}\,\mathrm{e}^{3x}(3x - 1) + c.$$

Herhaald partieel integreren

Om de oppervlakte van het vlakdeel V in de figuur hiernaast exact te berekenen, pas je twee keer partieel integreren toe.



$$\int (1 - x^2)\,\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \int (1 - x^2)\,\mathrm{d}\,\mathrm{e}^x = (1 - x^2)\,\mathrm{e}^x - \int \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}(1 - x^2) =$$
$$(1 - x^2)\,\mathrm{e}^x + \int 2x\,\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = (1 - x^2)\,\mathrm{e}^x + \int 2x\,\mathrm{d}\,\mathrm{e}^x =$$
$$(1 - x^2)\,\mathrm{e}^x + 2x\,\mathrm{e}^x - \int \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}2x = (1 - x^2 + 2x)\,\mathrm{e}^x - \int 2\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x =$$
$$(1 - x^2 + 2x)\,\mathrm{e}^x - 2\,\mathrm{e}^x + c = (-x^2 + 2x - 1)\,\mathrm{e}^x + c$$

$$O(V) = \int_{-1}^{1} (1 - x^2)\,\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \left[(-x^2 + 2x - 1)\,\mathrm{e}^x\right]_{-1}^{1} = 0 - -4\mathrm{e}^{-1} = \frac{4}{\mathrm{e}}$$

Ook de primitieven van $f(x) = \mathrm{e}^x\cos(2x)$ bereken je met herhaald partieel integreren.

$$\int \mathrm{e}^x\cos(2x)\,\mathrm{d}x = \int \cos(2x)\,\mathrm{d}\,\mathrm{e}^x = \cos(2x) \cdot \mathrm{e}^x - \int \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}\cos(2x)$$
$$= \mathrm{e}^x\cos(2x) - \int \mathrm{e}^x \cdot -2\sin(2x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^x\cos(2x) + \int 2\,\mathrm{e}^x\sin(2x)\,\mathrm{d}x$$
$$= \mathrm{e}^x\cos(2x) + \int 2\sin(2x)\,\mathrm{d}\,\mathrm{e}^x$$
$$= \mathrm{e}^x\cos(2x) + 2\sin(2x) \cdot \mathrm{e}^x - \int \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}\,2\sin(2x)$$
$$= \mathrm{e}^x\cos(2x) + 2\,\mathrm{e}^x\sin(2x) - \int \mathrm{e}^x \cdot 4\cos(2x)\,\mathrm{d}x$$
$$= \mathrm{e}^x\cos(2x) + 2\,\mathrm{e}^x\sin(2x) - 4\int \mathrm{e}^x\cos(2x)\,\mathrm{d}x$$

Uit $\int \mathrm{e}^x\cos(2x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^x\cos(2x) + 2\,\mathrm{e}^x\sin(2x) - 4\int \mathrm{e}^x\cos(2x)\,\mathrm{d}x$ volgt

$5\int \mathrm{e}^x\cos(2x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^x\cos(2x) + 2\,\mathrm{e}^x\sin(2x)$.

Dus $F(x) = \tfrac{1}{5}\mathrm{e}^x\cos(2x) + \tfrac{2}{5}\mathrm{e}^x\sin(2x) + c = \tfrac{1}{5}\mathrm{e}^x(\cos(2x) + 2\sin(2x)) + c$.

K.3 Cyclometrische functies

030 In deze opgave ga je $\int_0^1 \frac{1}{x^2+1}\,dx$ exact berekenen.

Stel $x = \tan(t)$ met $-\frac{1}{2}\pi < t < \frac{1}{2}\pi$.
Vul in.

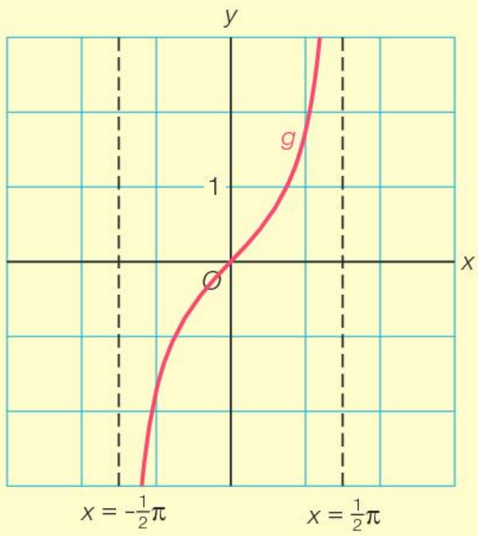
$$\int_0^1 \frac{1}{x^2+1}\,dx = \int_{t=\ldots}^{t=\ldots} \frac{1}{\tan^2(t)+1}\,d\tan(t) = \int_{\ldots}^{\ldots} \frac{1}{\tan^2(t)+1} \cdot (\tan^2(t)+1)\,dt$$

$$= \int_{\ldots}^{\ldots} 1\,dt = [\ldots]_{\ldots}^{\ldots} = \ldots$$

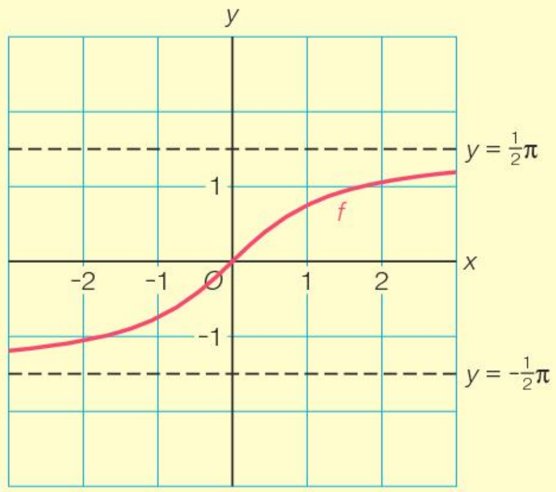
Theorie A De functie $f(x) = \arctan(x)$

In figuur K.8 is de grafiek van de functie $g(x) = \tan(x)$ met $D_g = \langle -\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi \rangle$ getekend.
Omdat op het interval $\langle -\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi \rangle$ elke functiewaarde maar één keer voorkomt, heeft de functie $g(x) = \tan(x)$ met $D_g = \langle -\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi \rangle$ een inverse functie g^{inv}.
Deze inverse functie noteren we als $f(x) = g^{\text{inv}}(x) = \arctan(x)$. Spreek uit arctangens x.
De functie $f(x) = \arctan(x)$ is een **cyclometrische functie**.
De grafiek van f is in figuur K.9 getekend.

Je hebt met een functie te maken als bij elke x uit het domein van de functie precies één functiewaarde hoort.

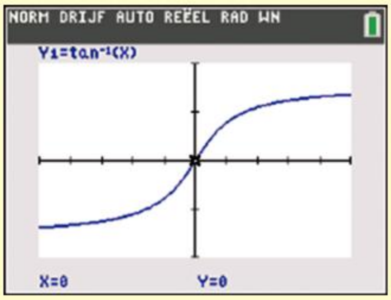


figuur K.8 De functie $g(x) = \tan(x)$ met $D_g = \langle -\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi \rangle$ heeft een inverse.



figuur K.9 De functie $f(x) = \arctan(x)$ heeft $D_f = \mathbb{R}$ en $B_f = \langle -\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi \rangle$.

Je kunt de grafiek van $f(x) = \arctan(x)$ plotten door in te voeren $y_1 = \tan^{-1}(x)$. In figuur K.10 is x tussen -5 en 5 en y tussen -2 en 2 gekozen.



figuur K.10

De functie $f(x) = \arctan(x)$ is de inverse functie van de functie $g(x) = \tan(x)$ met $D_g = \langle -\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi \rangle$.
Er geldt $D_f = \mathbb{R}$ en $B_f = \langle -\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi \rangle$.

De **arctangensfunctie** gebruiken we om de functie $f(x) = \dfrac{1}{x^2 + 1}$ te primitiveren.

Substitutie van $x = \tan(t)$ in $\int \dfrac{1}{x^2 + 1}\,dx$ geeft $\int \dfrac{1}{\tan^2(t) + 1}\,d\tan(t)$.

Omdat $\dfrac{d\tan(t)}{dt} = \tan^2(t) + 1$ vervangen we $d\tan(t)$ door $(\tan^2(t) + 1)\,dt$.

Je krijgt $\int \dfrac{1}{\tan^2(t) + 1}\,d\tan(t) = \int \dfrac{\tan^2(t) + 1}{\tan^2(t) + 1}\,dt = \int 1\,dt = t + c$.

Uit $x = \tan(t)$ volgt $t = \arctan(x)$ en dus $\int \dfrac{1}{x^2 + 1}\,dx = \arctan(x) + c$.

$f(x) = \dfrac{1}{x^2 + 1}$ geeft $F(x) = \arctan(x) + c$

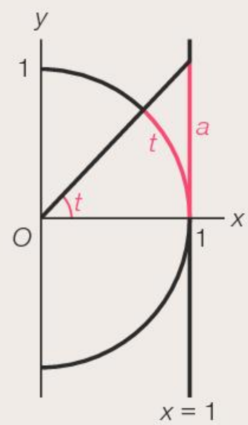
$g(x) = \arctan(x)$ geeft $g'(x) = \dfrac{1}{x^2 + 1}$

INFORMATIEF

Arcus en cyclometrisch

Arc in de cyclometrische functie arctangens komt van het Latijnse woord arcus, dat boog betekent.
Het gebruik van het begrip boog is als volgt te verklaren.
Op de eenheidscirkel hoort bij een hoek van t radialen een boog met lengte t.
Is $-\frac{1}{2}\pi < t < \frac{1}{2}\pi$ en stel je $\tan(t) = a$, dan is t de boog (arcus) waarvan de tangens a is, dus $t = \arctan(a)$.

Het woord cyclometrisch komt van het Griekse woord kuklos, dat cirkel betekent, en metrein, dat meten betekent.



Voorbeeld

a Bereken exact $\arctan(\frac{1}{3}\sqrt{3})$.

b Los algebraïsch op $\arctan(x) = \frac{1}{3}\sqrt{3}$. Rond af op drie decimalen.

c Differentieer $f(x) = \arctan(x^2 + 1)$.

d Bereken exact $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{4}\sqrt{3}} \frac{1}{(4x)^2 + 1}\,dx$.

Uitwerking

a $\arctan(\frac{1}{3}\sqrt{3}) = \frac{1}{6}\pi$ $\tan(\frac{1}{6}\pi) = \frac{1}{3}\sqrt{3}$ en $-\frac{1}{2}\pi < \frac{1}{6}\pi < \frac{1}{2}\pi$

b $\arctan(x) = \frac{1}{3}\sqrt{3}$

$x = \tan(\frac{1}{3}\sqrt{3})$ $\boxed{t = \arctan(x) \text{ dus } x = \tan(t)}$

$x \approx 0{,}651$

c $f(x) = \arctan(x^2 + 1)$ geeft

$$f'(x) = \frac{1}{(x^2+1)^2+1} \cdot 2x = \frac{2x}{(x^2+1)^2+1} = \frac{2x}{x^4+2x^2+2}$$

d $$\int_0^{\frac{1}{4}\sqrt{3}} \frac{1}{(4x)^2+1}\,dx = \left[\tfrac{1}{4}\arctan(4x)\right]_0^{\frac{1}{4}\sqrt{3}} = \tfrac{1}{4}\arctan(\sqrt{3}) - \tfrac{1}{4}\arctan(0) = \tfrac{1}{4} \cdot \tfrac{1}{3}\pi - 0 = \tfrac{1}{12}\pi$$

R31

a Waarom is $\arctan(\frac{1}{3}\sqrt{3})$ niet gelijk aan $1\frac{1}{6}\pi$, terwijl $\tan(1\frac{1}{6}\pi) = \frac{1}{3}\sqrt{3}$?

b Waarom is $x = \tan(\sqrt{3})$ geen oplossing van de vergelijking $\arctan(x) = \sqrt{3}$?

c Zie de uitwerking van voorbeeld d.
Licht de factor $\frac{1}{4}$ in de primitieve toe.

32 Vul de tabel in en leer hem uit het hoofd.

x	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{3}\sqrt{3}$	0	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$
$\arctan(x)$					$\frac{1}{6}\pi$		

33 Los algebraïsch op. Rond zo nodig af op drie decimalen.

a $\arctan(x) = \frac{1}{3}\pi$

b $\arctan(x - 2) = -\frac{1}{4}\pi$

c $\arctan(x^2 - 1) = \frac{1}{4}\pi$

d $\arctan(x) = \frac{2}{3}\pi$

e $\arctan(x) = \sqrt{2}$

f $\arctan(x^2 - 1) = 1$

34 Differentieer.

a $f(x) = 2\arctan(\frac{1}{2}x)$

b $g(x) = \arctan(x - 2)$

c $h(x) = \arctan(x^2)$

35 Bereken exact.

a $\displaystyle\int_{-\frac{1}{3}\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \frac{1}{x^2 + 1}\,dx$

b $\displaystyle\int_{-2}^{-1} \frac{1}{(x + 1)^2 + 1}\,dx$

c $\displaystyle\int_{0}^{\frac{1}{3}\sqrt{3}} \frac{3}{9x^2 + 1}\,dx$

36 **a** Los de vergelijking $\arctan(2x - 1) = \frac{1}{6}\pi$ exact op.

b Los de vergelijking $\arctan(1\frac{1}{2}\pi + \sqrt{x}) = \sqrt{2}$ algebraïsch op. Rond af op twee decimalen.

c Differentieer $f(x) = \arctan(2x^2 + 1)$.

d Bereken exact $\displaystyle\int_{\frac{1}{5}}^{\frac{1}{5}\sqrt{3}} \frac{10}{25x^2 + 1}\,dx$.

O37 Gegeven is de functie $f(x) = \dfrac{10}{x^2 + 4}$.

Om de primitieven van f te berekenen, schrijf je f in de vorm $f(x) = \dfrac{a}{(bx)^2 + 1}$.

a Bereken a en b.

b Primitiveer f.

Theorie B De arctangensfunctie en primitiveren

Om de functie $f(x) = \dfrac{24}{9x^2 + 4}$ te primitiveren, gebruik je

$\displaystyle\int \frac{1}{u^2 + 1}\,du = \arctan(u) + c$ en een primitieve van $f(ax + b)$ is $\dfrac{1}{a}F(ax + b)$.

$$F(x) = \int \frac{24}{9x^2 + 4}\,dx = \int \frac{6}{\frac{9}{4}x^2 + 1}\,dx = \int 6 \cdot \frac{1}{(\frac{3}{2}x)^2 + 1}\,dx = 6 \cdot \tfrac{2}{3} \cdot \arctan(\tfrac{3}{2}x) + c$$
$$= 4\arctan(1\tfrac{1}{2}x) + c$$

Voorbeeld

Bereken exact $\int_0^2 \frac{6}{x^2 - 4x + 8}\,dx$.

Aanpak
Gebruik kwadraatafsplitsen om $x^2 - 4x + 8$ te schrijven als $(x - 2)^2 + 4$.

Uitwerking

$$\int_0^2 \frac{6}{x^2 - 4x + 8}\,dx = \int_0^2 \frac{6}{(x-2)^2 - 4 + 8}\,dx = \int_0^2 \frac{6}{(x-2)^2 + 4}\,dx = \int_0^2 \frac{1\frac{1}{2}}{\frac{(x-2)^2}{4} + 1}\,dx$$

$$= \int_0^2 \frac{1\frac{1}{2}}{\left(\frac{x-2}{2}\right)^2 + 1}\,dx = \int_0^2 \frac{1\frac{1}{2}}{(\frac{1}{2}x - 1)^2 + 1}\,dx = \left[1\tfrac{1}{2} \cdot 2 \cdot \arctan(\tfrac{1}{2}x - 1)\right]_0^2$$

$$= \left[3\arctan(\tfrac{1}{2}x - 1)\right]_0^2 = 3\arctan(0) - 3\arctan(-1) = 3 \cdot 0 - 3 \cdot -\tfrac{1}{4}\pi = \tfrac{3}{4}\pi$$

38 Primitiveer.

a $f(x) = \frac{5}{32x^2 + 2}$

b $g(x) = \frac{4}{x^2 + 4}$

c $h(x) = \frac{5}{x^2 + 6x + 10}$

d $j(x) = \frac{3}{x^2 + 4x + 5}$

39 Bereken exact.

a $\int_0^1 \frac{3}{x^2 + 3}\,dx$

b $\int_0^1 \frac{2x}{x^4 + 1}\,dx$

c $\int_3^6 \frac{5}{x^2 - 6x + 18}\,dx$

d $\int_0^{\sqrt{3}} \frac{\arctan(x)}{x^2 + 1}\,dx$

A40 Bereken exact.

a $\displaystyle\int_0^{1\frac{1}{2}} \frac{2}{4x^2+9}\,\mathrm{d}x$

b $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}\ln(3)} \frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^{2x}+1}\,\mathrm{d}x$

c $\displaystyle\int_0^{1} \frac{1}{4x^2-4x+2}\,\mathrm{d}x$

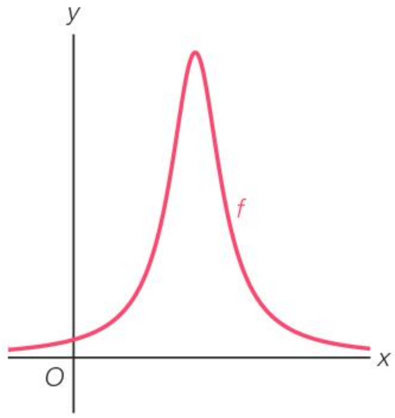
d $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\sin(x)}{\cos^2(x)+1}\,\mathrm{d}x$

A41 Gegeven is de functie $f(x) = \dfrac{10}{x^2-8x+17}$.

a Bereken exact het maximum van f.

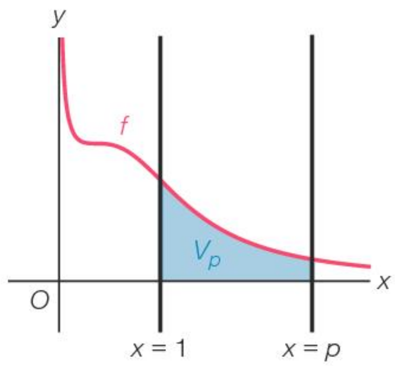
b Bereken exact de oppervlakte van het vlakdeel V dat ingesloten wordt door de grafiek van f, de x-as en de lijnen $x = 4$ en $x = 5$.

c Het vlakdeel W_p wordt ingesloten door de grafiek van f, de x-as en de lijnen $x = 4$ en $x = p$ met $p > 4$. Bereken exact de waarde van p in het geval dat $O(W_p) = 10$.



figuur K.11

A42 Het vlakdeel V_p wordt ingesloten door de grafiek van de functie $f(x) = \dfrac{4}{x\ln^2(x)+x}$, de x-as en de lijnen $x = 1$ en $x = p$ met $p > 1$.
Bereken exact voor welke p de oppervlakte van V_p gelijk is aan π.



figuur K.12

O43 In deze opgave ga je $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x$ exact berekenen.

Stel $x = \sin(t)$ met $-\frac{1}{2}\pi < t < \frac{1}{2}\pi$ en vul in.

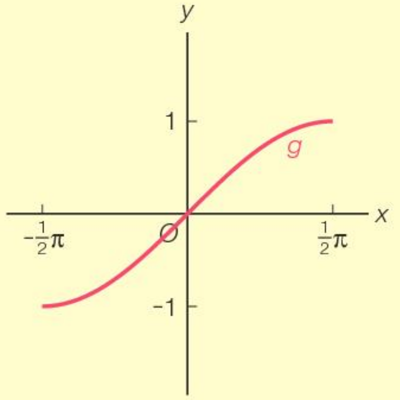
$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = \int_{t=\ldots}^{t=\ldots} \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2(t)}}\,\mathrm{d}\sin(t)$$

$$= \int_{\ldots}^{\ldots} \frac{1}{\sqrt{\cos^2(t)}} \cdot \cos(t)\,\mathrm{d}t$$

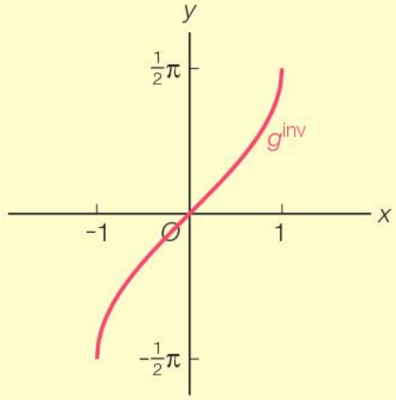
$$= \int_{\ldots}^{\ldots} \frac{1}{\cos(t)} \cdot \cos(t)\,\mathrm{d}t = \int_{\ldots}^{\ldots} 1\,\mathrm{d}t = [\ldots]_{\ldots}^{\ldots} = \ldots$$

Theorie C De functie $f(x) = \arcsin(x)$

De functie $g(x) = \sin(x)$ met domein $[-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi]$ heeft een inverse.
Dit is de cyclometrische functie $y = \arcsin(x)$.



figuur K.13 $g(x) = \sin(x)$ met domein $[-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi]$.



figuur K.14 $g^{\text{inv}}(x) = \arcsin(x)$ heeft domein $[-1, 1]$ en bereik $[-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi]$.

De functie $f(x) = \arcsin(x)$ is de inverse van de functie $g(x) = \sin(x)$ met $D_g = [-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi]$.
Er geldt $D_f = [-1, 1]$ en $B_f = [-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi]$.

We gebruiken een arcsinus om de functie $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ te primitiveren.

Substitutie van $x = \sin(t)$ in $\int \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$ geeft

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2(t)}}\,d\sin(t) = \int \frac{1}{\sqrt{\cos^2(t)}} \cdot \cos(t)\,dt = \int \frac{\cos(t)}{|\cos(t)|}\,dt.$$

Neem je $-\frac{1}{2}\pi < t < \frac{1}{2}\pi$, dan is $\cos(t) > 0$ en dus is $|\cos(t)| = \cos(t)$.

Zo krijg je $\int \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \int 1\,dt = t + c$.

Omdat $x = \sin(t)$ en $-\frac{1}{2}\pi < t < \frac{1}{2}\pi$ is $t = \arcsin(x)$ en dus

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arcsin(x) + c.$$

$f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ geeft $F(x) = \arcsin(x) + c$

$g(x) = \arcsin(x)$ geeft $g'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

Voorbeeld

Bereken exact $\int_{1}^{\sqrt{3}} \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}\,dx$.

Uitwerking

$$\int_{1}^{\sqrt{3}} \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}\,dx = \int_{1}^{\sqrt{3}} \frac{1}{2\sqrt{1-\frac{1}{4}x^2}}\,dx = \int_{1}^{\sqrt{3}} \frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{1-(\frac{1}{2}x)^2}}\,dx = \left[\tfrac{1}{2}\cdot 2\cdot \arcsin(\tfrac{1}{2}x)\right]_1^{\sqrt{3}}$$

$$= \arcsin(\tfrac{1}{2}\sqrt{3}) - \arcsin(\tfrac{1}{2}) = \tfrac{1}{3}\pi - \tfrac{1}{6}\pi = \tfrac{1}{6}\pi$$

44 Vul de tabel in.

x	-1	$-\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1
$\arcsin(x)$									

45 Los algebraïsch op. Rond zo nodig af op drie decimalen.

a $\arcsin(x) = \frac{1}{2}\pi$

b $\arcsin(x) = -\frac{1}{6}\pi$

c $\arcsin(x) = 2$

d $3\arcsin(x - \sqrt{3}) = \pi$

46 Bereken exact.

a $\int_{\frac{1}{6}}^{\frac{1}{6}\sqrt{3}} \frac{1}{\sqrt{1-9x^2}}\,dx$

b $\int_{-1\frac{1}{2}\sqrt{2}}^{1\frac{1}{2}\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{9-x^2}}\,dx$

c $\int_{0}^{\frac{1}{2}\sqrt{2}} \frac{x}{\sqrt{1-x^4}}\,dx$

d $\int_{0}^{1} \frac{x}{\sqrt{4-x^4}}\,dx$

47 Bereken met behulp van partieel integreren de primitieven.

a $f(x) = \arctan(x)$

b $g(x) = \arcsin(x)$

A48 Primitiveer.

a $f(x) = \dfrac{\arcsin(x)}{\sqrt{1-x^2}}$

b $g(x) = \dfrac{1}{x\sqrt{1-\ln^2(x)}}$

A49 Gegeven is de functie $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{25-x^4}}$.

a Bereken exact het domein van f en schets de grafiek van f.

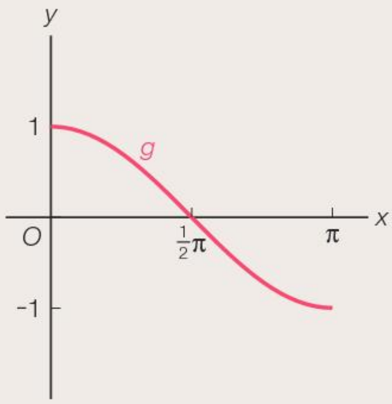
b Los exact op $f(x) \leq \frac{1}{3}x$.

c Bereken exact de oppervlakte van het vlakdeel V dat wordt ingesloten door de grafiek van f, de x-as en de lijn $x = \frac{1}{2}\sqrt{10}$.

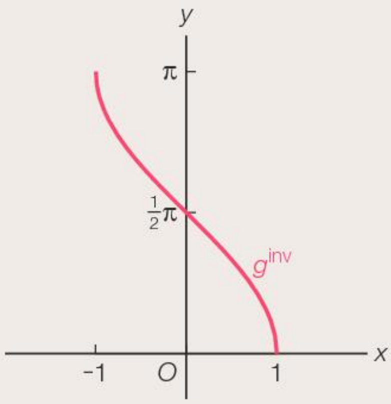
INFORMATIEF

De functie $f(x) = \arccos(x)$

Kies je bij de functie $g(x) = \cos(x)$ als domein $D_g = [0, \pi]$, dan heeft deze functie een inverse. Dit is de cyclometrische functie $f(x) = \arccos(x)$.



$g(x) = \cos(x)$ met domein $[0, \pi]$.



$g^{\text{inv}}(x) = \arccos(x)$ heeft domein $[-1, 1]$ en bereik $[0, \pi]$.

De functie $f(x) = \arccos(x)$ is de inverse van $g(x) = \cos(x)$ met domein $D_g = [0, \pi]$. Er geldt $D_f = [-1, 1]$ en $B_f = [0, \pi]$.

$$\left.\begin{array}{l} x = \sin(p) \text{ geeft } p = \arcsin(x) \\ x = \sin(p) = \cos(\frac{1}{2}\pi - p) \text{ geeft } \frac{1}{2}\pi - p = \arccos(x) \end{array}\right\} \arccos(x) = \tfrac{1}{2}\pi - \arcsin(x)$$

Hieruit volgt $f(x) = \arccos(x)$ geeft $f'(x) = \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$ en

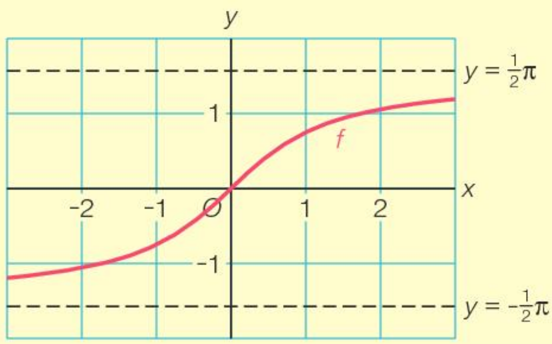
$g(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ geeft $G(x) = -\arccos(x) + c$.

Terugblik

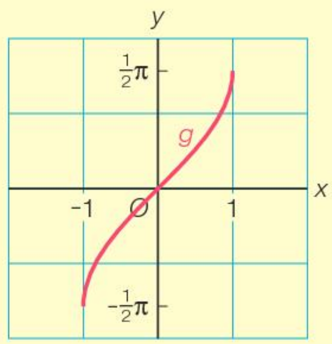
Cyclometrische functies

De functies $f(x) = \arctan(x)$ en $g(x) = \arcsin(x)$ zijn cyclometrische functies.
Het zijn de inverse functies van
- $y = \tan(x)$ met domein $\langle -\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi \rangle$
- $y = \sin(x)$ met domein $[-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi]$.

In de figuren hieronder zie je de grafieken van f en g.



$f(x) = \arctan(x)$
$D_f = \mathbb{R}$ en $B_f = \langle -\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi \rangle$



$g(x) = \arcsin(x)$
$D_g = [-1, 1]$ en $B_g = [-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi]$

Cyclometrische functies en primitieven

De primitieven van $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$ zijn $F(x) = \arctan(x) + c$

en van $g(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ zijn de primitieven $G(x) = \arcsin(x) + c$.

Bij het primitiveren van $f(x) = \dfrac{10}{x^2+4}$ krijg je

$$F(x) = \int \frac{10}{x^2+4}\,dx = \int \frac{2\frac{1}{2}}{\frac{1}{4}x^2+1}\,dx = \int \frac{2\frac{1}{2}}{(\frac{1}{2}x)^2+1}\,dx = 5\arctan(\tfrac{1}{2}x) + c.$$

Bij het primitiveren van $g(x) = \dfrac{10}{x^2+8x+17}$ krijg je

$$G(x) = \int \frac{10}{x^2+8x+17}\,dx = \int \frac{10}{(x+4)^2+1}\,dx = 10\arctan(x+4) + c.$$

Bij het primitiveren van $h(x) = \dfrac{10}{\sqrt{25-x^2}}$ krijg je

$$H(x) = \int \frac{10}{\sqrt{25-x^2}}\,dx = \int \frac{10}{5\sqrt{1-\frac{1}{25}x^2}}\,dx = \int \frac{2}{\sqrt{1-(\frac{1}{5}x)^2}}\,dx = 10\arcsin(\tfrac{1}{5}x) + c.$$

K.4 Breuksplitsen

050 Gegeven zijn de functies $f(x) = \dfrac{2x}{x^2+1}$, $g(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$ en $h(x) = \dfrac{2x+1}{x^2+1}$.

a Bereken van f en van g de primitieve met integratieconstante 0.

b Licht toe dat $h(x) = f(x) + g(x)$ en geef de primitieven van h.

051 Gegeven is de functie $f(x) = \dfrac{2x+5}{x+1}$.

a De functie is te schrijven als $f(x) = \dfrac{2x}{x+1} + \dfrac{5}{x+1}$.

Licht toe dat deze splitsing correct is, maar dat f hiermee niet te primitiveren is.

b De functie is ook te schrijven als $f(x) = 2 + \dfrac{3}{x+1}$.

Licht toe dat deze splitsing correct is en dat f hiermee wel te primitiveren is.

Theorie A Staartdelingen

In opgave 50 heb je gezien dat $\dfrac{2x+1}{x^2+1} = \dfrac{2x}{x^2+1} + \dfrac{1}{x^2+1}$.

Door de breuk $\dfrac{2x+1}{x^2+1}$ op te splitsen in twee delen die elk afzonderlijk te primitiveren zijn, heb je de primitieven gevonden van $h(x) = \dfrac{2x+1}{x^2+1}$.

Deze methode wordt **breuksplitsen** genoemd.

In opgave 51 heb je te maken met een gebroken functie waarvan de noemer een lineaire functie is. Om dit soort functies te kunnen primitiveren, splits je de breuk met een **staartdeling**.

Bij de functie $f(x) = \dfrac{2x+5}{x+1}$ gaat dit als volgt.

$x + 1 \ / \ 2x + 5 \ \backslash \ 2 \quad \longleftarrow \quad \boxed{\dfrac{2x}{x} = 2}$

$\boxed{2(x+1)} \longrightarrow \quad 2x + 2 \ -$

$\qquad\qquad\qquad 3$

Dus $f(x) = 2 + \dfrac{3}{x+1}$.

De primitieven van f zijn $F(x) = 2x + 3\ln|x+1| + c$.

Om de primitieven van de functie $g(x) = \dfrac{2x^2 + 5x + 1}{x + 1}$ te berekenen,

gebruik je ook een staartdeling.

$$
\begin{array}{l}
x + 1 \;/\; 2x^2 + 5x + 1 \;\backslash\; 2x + 3 \\
\qquad\quad \underline{2x^2 + 2x}\; - \\
\qquad\qquad\quad 3x + 1 \\
\qquad\qquad\quad \underline{3x + 3}\; - \\
\qquad\qquad\qquad -2
\end{array}
$$

$\boxed{2x(x + 1)}$

$\boxed{\dfrac{2x^2}{x} = 2x}$

Dus $g(x) = 2x + 3 - \dfrac{2}{x + 1}$ en dit geeft $G(x) = x^2 + 3x - 2\ln|x + 1| + c$.

Een **polynoom** of **veelterm** is van de vorm $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_2x^2 + a_1x + a_0$ met $a_n \neq 0$.
De **graad van de polynoom** is n. De getallen $a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots, a_2, a_1$ en a_0 heten de **coëfficiënten van de polynoom**.

$2x^4 - 7x^3 + 4x + 11$ is een polynoom van graad 4 en de coëfficiënt van x^3 is -7.

Elke functie van de vorm $f(x) = \dfrac{p(x)}{ax + b}$ met $p(x)$ een polynoom en $a \neq 0$ is met behulp van een staartdeling te schrijven in de vorm $f(x) = q(x) + \dfrac{k}{ax + b}$ met $q(x)$ een polynoom en k een constante. Nadat de functie tot deze vorm is herleid, vind je de primitieven. De primitieven zijn $F(x) = Q(x) + \dfrac{k}{a}\ln|ax + b| + c$.

Voorbeeld

Bereken exact $\displaystyle\int_1^4 \frac{x^2 + 8x}{2x - 1}\,dx$.

Uitwerking

$$
\begin{array}{l}
2x - 1 \;/\; x^2 + 8x \;\backslash\; \tfrac{1}{2}x + 4\tfrac{1}{4} \\
\qquad\quad \underline{x^2 - \tfrac{1}{2}x}\; - \\
\qquad\qquad 8\tfrac{1}{2}x \\
\qquad\qquad \underline{8\tfrac{1}{2}x - 4\tfrac{1}{4}}\; - \\
\qquad\qquad\qquad 4\tfrac{1}{4}
\end{array}
$$

Dus $\dfrac{x^2 + 8x}{2x - 1} = \tfrac{1}{2}x + 4\tfrac{1}{4} + \dfrac{4\tfrac{1}{4}}{2x - 1}$.

$$\int_1^4 \frac{x^2 + 8x}{2x - 1}\,dx = \int_1^4 \left(\tfrac{1}{2}x + 4\tfrac{1}{4} + \frac{4\tfrac{1}{4}}{2x - 1}\right)dx = \left[\tfrac{1}{4}x^2 + 4\tfrac{1}{4}x + 2\tfrac{1}{8}\ln|\,2x - 1\,|\right]_1^4$$

$$= 4 + 17 + 2\tfrac{1}{8}\ln(7) - (\tfrac{1}{4} + 4\tfrac{1}{4} + 2\tfrac{1}{8}\ln(1)) = 16\tfrac{1}{2} + 2\tfrac{1}{8}\ln(7)$$

52 Primitiveer.

a $f(x) = \dfrac{2x+1}{x+1}$

b $f(x) = \dfrac{x}{x+1}$

c $f(x) = \dfrac{x+1}{2x+1}$

d $f(x) = \dfrac{2-x}{x+1}$

53 Bereken exact.

a $\displaystyle\int_2^3 \frac{x^2-2x+3}{x-1}\,dx$

b $\displaystyle\int_{-4}^{-2} \frac{-2x^2-x}{x+1}\,dx$

54 **a** Primitiveer $f(x) = \dfrac{3-4x}{2x+1}$ en $g(x) = \dfrac{6x-1}{1-2x}$.

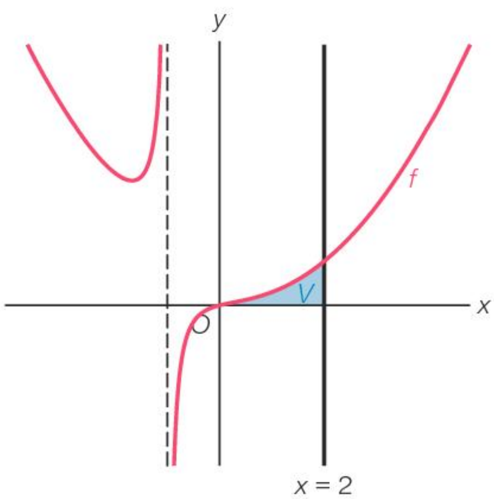
b Bereken exact $\displaystyle\int_3^6 \frac{2x^2-5x}{2x-1}\,dx$.

A55 Gegeven is de functie $f(x) = \dfrac{x^3+x}{x+1}$.

De lijn k raakt de grafiek van f in de oorsprong en snijdt de grafiek van f in het punt A.

a Bereken exact de coördinaten van A.

b Bereken exact de oppervlakte van het vlakdeel V dat wordt ingesloten door de grafiek van f, de x-as en de lijn $x = 2$.



figuur K.15

R56 Zie het informatief hieronder.
Primitiveer met behulp van uitdelen.

a $f(x) = \dfrac{3x+1}{x+1}$

b $g(x) = \dfrac{4x}{2x-1}$

INFORMATIEF

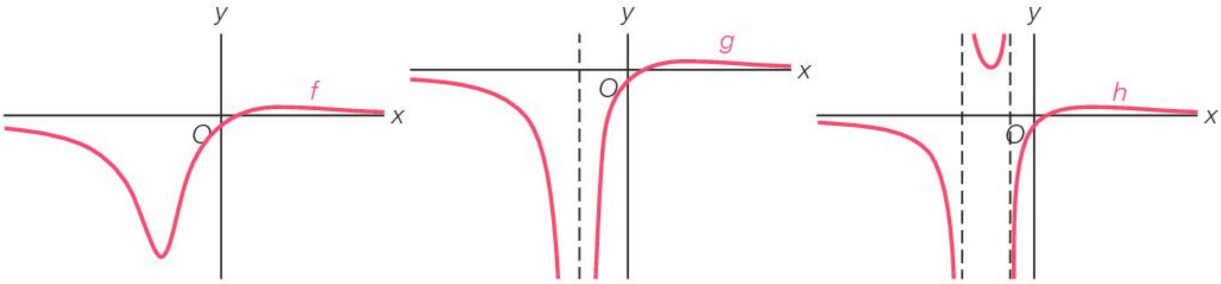
Uitdelen in plaats van staartdelen

De breuk $\dfrac{2x+5}{x+1}$ is ook te splitsen met behulp van uitdelen.

Zorg ervoor dat in de teller de vorm $A(x+1)+B$ komt. Je ziet dat $A = 2$ en je krijgt $2(x+1)+3$.

Dus $\dfrac{2x+5}{x+1} = \dfrac{2(x+1)+3}{x+1} = 2 + \dfrac{3}{x+1}$.

057 Gegeven zijn de functies $f(x) = \dfrac{2x-1}{x^2+4x+5}$, $g(x) = \dfrac{2x-1}{x^2+4x+4}$ en $h(x) = \dfrac{2x-1}{x^2+4x+3}$. Hieronder zie je de bijbehorende grafieken.



figuur K.16

a Verklaar het opmerkelijke verschil tussen de drie grafieken.

Bij het primitiveren van deze functies horen verschillende aanpakken.
We bekijken eerst de functie f.
De noemer van $f(x)$ is te schrijven als $(x+2)^2+1$.

b Licht dit toe.

Het functievoorschrift van f is te schrijven als
$f(x) = \dfrac{2x+4}{x^2+4x+5} + \dfrac{c}{x^2+4x+5}$ oftewel als
$f(x) = \dfrac{2x+4}{x^2+4x+5} + \dfrac{c}{(x+2)^2+1}$.
Deze twee breuken zijn te primitiveren.

c Licht dit toe.

We bekijken nu de functie g.
De noemer van $g(x)$ is te schrijven als $(x+2)^2$.
Het functievoorschrift van g is te schrijven als $g(x) = \dfrac{a}{x+2} + \dfrac{b}{(x+2)^2}$.
Deze twee breuken zijn te primitiveren.

d Licht dit toe.

We bekijken ten slotte de functie h.
De noemer van $h(x)$ is te ontbinden in $(x+1)(x+3)$.
Het functievoorschrift van h is hiermee te schrijven als
$h(x) = \dfrac{a}{x+1} + \dfrac{b}{x+3}$.
Deze twee breuken zijn te primitiveren.

e Licht dit toe.

Theorie B Primitieven van $f(x) = \dfrac{p(x)}{x^2 + bx + c}$

Elke functie f met een functievoorschrift van de vorm 'een polynoom gedeeld door een tweedegraadsfunctie' is te herleiden tot de vorm $f(x) = \dfrac{p(x)}{x^2 + bx + c}$ door teller en noemer te delen door de coëfficiënt van x^2 uit de noemer.
Met behulp van breuksplitsen is het functievoorschrift van f te schrijven in de vorm $f(x) = q(x) + \dfrac{l(x)}{x^2 + bx + c}$ met $q(x)$ een polynoom en $l(x)$ een lineaire functie.

Schrijf de noemer in de vorm $x^2 + bx + c$, dus $\dfrac{x^3 - 2x}{2x^2 + 3x + 4} = \dfrac{\frac{1}{2}x^3 - x}{x^2 + 1\frac{1}{2}x + 2}$.

Om f te primitiveren moeten we dus onderzoeken hoe functies van de vorm $g(x) = \dfrac{l(x)}{x^2 + bx + c}$ zijn te primitiveren. Hierbij is de discriminant $D = b^2 - 4c$ van de noemer van belang.
We onderscheiden drie situaties: $D < 0$, $D = 0$ en $D > 0$.

I $\dfrac{l(x)}{x^2 + bx + c}$ **met** $b^2 - 4c < 0$

De noemer is te schrijven in de vorm $(x - p)^2 + q$ met $q > 0$.
Bij $f(x) = \dfrac{2x - 1}{x^2 + 4x + 5}$ krijg je

2x + 4 is de afgeleide van $x^2 + 4x + 5$.

$$f(x) = \frac{2x - 1}{x^2 + 4x + 5} = \frac{2x + 4 - 5}{x^2 + 4x + 5} = \frac{2x + 4}{x^2 + 4x + 5} - \frac{5}{x^2 + 4x + 5}.$$

$$\int \frac{2x + 4}{x^2 + 4x + 5}\,dx = \int \frac{1}{x^2 + 4x + 5}\,d(x^2 + 4x + 5) = \ln|x^2 + 4x + 5| + c_1$$

$$\int \frac{5}{x^2 + 4x + 5}\,dx = \int \frac{5}{(x + 2)^2 + 1}\,dx = 5\arctan(x + 2) + c_2$$

Dus $F(x) = \ln|x^2 + 4x + 5| + 5\arctan(x + 2) + c$.

II $\dfrac{l(x)}{x^2 + bx + c}$ **met** $b^2 - 4c = 0$

De noemer is te schrijven in de vorm $(x - p)^2$.
Bij $g(x) = \dfrac{2x - 1}{x^2 + 4x + 4}$ krijg je

$$g(x) = \frac{2x - 1}{x^2 + 4x + 4} = \frac{2x - 1}{(x + 2)^2} = \frac{2(x + 2) - 5}{(x + 2)^2} = \frac{2}{x + 2} - \frac{5}{(x + 2)^2} = \frac{2}{x + 2} - 5(x + 2)^{-2}$$

en dit geeft $G(x) = 2\ln|x + 2| + 5(x + 2)^{-1} + c = 2\ln|x + 2| + \dfrac{5}{x + 2} + c$.

III $\quad \dfrac{l(x)}{x^2 + bx + c}$ **met** $\boldsymbol{b^2 - 4c > 0}$

De noemer is te ontbinden.

Bij $h(x) = \dfrac{2x - 1}{x^2 + 4x + 3}$ krijg je

$$h(x) = \frac{2x - 1}{(x + 1)(x + 3)} = \frac{a}{x + 1} + \frac{b}{x + 3} = \frac{a(x + 3) + b(x + 1)}{(x + 1)(x + 3)} = \frac{ax + 3a + bx + b}{(x + 1)(x + 3)}$$

$$= \frac{(a + b)x + 3a + b}{(x + 1)(x + 3)}.$$

Zo krijg je het stelsel $\begin{cases} a + b = 2 \\ 3a + b = -1 \end{cases}$ en dit geeft $a = -1\frac{1}{2}$ en $b = 3\frac{1}{2}$.

Dus $h(x) = \dfrac{-1\frac{1}{2}}{x + 1} + \dfrac{3\frac{1}{2}}{x + 3}$ en dit geeft $H(x) = -1\frac{1}{2}\ln|x + 1| + 3\frac{1}{2}\ln|x + 3| + c$.

Voorbeeld

Bereken exact $\displaystyle\int_4^5 \frac{x^2 - 3x + 5}{x^2 - 4x + 4}\,\mathrm{d}x$.

Uitwerking

$x^2 - 4x + 4 \,/\, x^2 - 3x + 5 \,\backslash\, 1$

$\quad\quad\quad\quad x^2 - 4x + 4$ $-$

$\quad\quad\quad\quad\quad\quad x + 1$

Dus $\dfrac{x^2 - 3x + 5}{x^2 - 4x + 4} = 1 + \dfrac{x + 1}{x^2 - 4x + 4} = 1 + \dfrac{x - 2 + 3}{(x - 2)^2} = 1 + \dfrac{x - 2}{(x - 2)^2} + \dfrac{3}{(x - 2)^2}$

$$= 1 + \frac{1}{x - 2} + 3(x - 2)^{-2}.$$

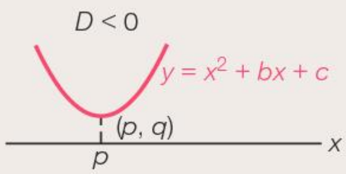
$$\int_4^5 \frac{x^2 - 3x + 5}{x^2 - 4x + 4}\,\mathrm{d}x = \int_4^5 \left(1 + \frac{1}{x - 2} + 3(x - 2)^{-2}\right)\mathrm{d}x = \left[x + \ln|x - 2| - 3(x - 2)^{-1}\right]_4^5$$

$$= \left[x + \ln|x - 2| - \frac{3}{x - 2}\right]_4^5 = 5 + \ln(3) - 1 - (4 + \ln(2) - \tfrac{3}{2})$$

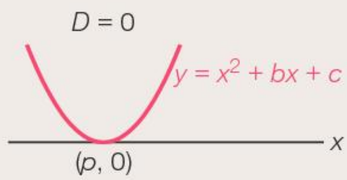
$$= 1\tfrac{1}{2} + \ln(3) - \ln(2) = 1\tfrac{1}{2} + \ln(1\tfrac{1}{2})$$

INFORMATIEF

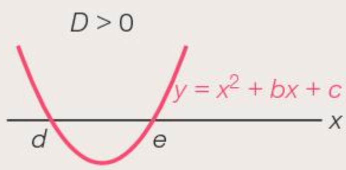
De discriminant van $y = x^2 + bx + c$



$y = (x - p)^2 + q$ met $q > 0$



$y = (x - p)^2$



$y = (x - d)(x - e)$

R58 Zie de theorie en het voorbeeld.
In de theorie staat dat een functie $f(x) = \dfrac{p(x)}{x^2 + bx + c}$ te schrijven is in de vorm $f(x) = q(x) + \dfrac{l(x)}{x^2 + bx + c}$.
Geef van het voorbeeld $p(x)$, $q(x)$, $l(x)$, b en c.

59 Primitiveer.

a $f(x) = \dfrac{x^2 + x}{x^2 + 1}$ **b** $f(x) = \dfrac{x^2 - 6x + 8}{x^2 - 6x + 9}$ **c** $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2 + 2x - 3}$

60 Primitiveer.

a $f(x) = \dfrac{x^3 + x}{x^2 + 1}$ **b** $f(x) = \dfrac{x^3 + x}{x^2 - 6x + 9}$ **c** $f(x) = \dfrac{2x^3 + 1}{2x^2 + x}$

61 Bereken exact.

a $\displaystyle\int_0^2 \frac{x^3}{x^2 + 4}\,\mathrm{d}x$ **b** $\displaystyle\int_0^8 \frac{x^3}{x^2 + 4x + 4}\,\mathrm{d}x$ **c** $\displaystyle\int_0^2 \frac{4x - 8}{x^2 - 4x - 5}\,\mathrm{d}x$

62 Bereken exact.

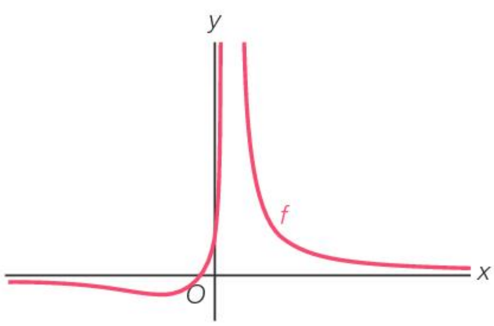
a $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^4 + 1}{x^2 + 1}\,\mathrm{d}x$ **b** $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^4 + 1}{x^2 + 2x + 1}\,\mathrm{d}x$ **c** $\displaystyle\int_0^2 \frac{x^4}{x^2 + 4x + 3}\,\mathrm{d}x$

R63 De functie $f(x) = \dfrac{2x - 5}{x^2 - 5x + 6}$ is op twee manieren te primitiveren.
I Met breuksplitsen.
II Met de substitutiemethode.
Werk beide manieren uit en ga na dat de primitieven die je vindt op hetzelfde neerkomen.

A64 Gegeven is de functie $f(x) = \dfrac{10x + 5}{4x^2 - 4x + 1}$.

a Bereken exact het bereik van f.

b Bereken exact de oppervlakte van het vlakdeel V dat wordt ingesloten door de grafiek van f, de x-as en de lijnen $x = 1$ en $x = 3$.



figuur K.17

A65

Gegeven is de functie $f(x) = \dfrac{x^2 + 4}{x^2 + 5x + 4}$.

a Bereken exact de extreme waarden van f.

b Los exact op $f(x) \leq 4$.

c Bereken exact de oppervlakte van het vlakdeel V dat wordt ingesloten door de grafiek van f, de x-as, de y-as en de lijn $x = 6$.

A66

Gegeven is de functie $f(x) = \dfrac{x}{x + 1}$.

Het vlakdeel V wordt ingesloten door de grafiek van f, de x-as en de lijn $x = 3$.

a Bereken exact de oppervlakte van V.

b Bereken exact de inhoud van het lichaam L dat ontstaat als V om de x-as wentelt.

A67 *

Gegeven is de functie $f(x) = \ln(x^2 + 1)$.

a Er zijn twee lijnen met richtingscoëfficiënt $\frac{3}{5}$ die de grafiek van f raken.
Bereken exact de coördinaten van de raakpunten.

b Bereken exact de oppervlakte van het vlakdeel V dat wordt ingesloten door de grafiek van f en de lijn $y = \ln(2)$.

INFORMATIEF

Ontbinden met de *abc*-formule of kwadraatafsplitsen

Bij $x^2 + 2x - 4 = 0$ is $D = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot -4 = 20 > 0$.
De oplossingen van de vergelijking zijn

$$x = \frac{-2 + \sqrt{20}}{2} = \frac{-2 + 2\sqrt{5}}{2} = -1 + \sqrt{5} \text{ en } x = -1 - \sqrt{5}.$$

Daarom is $x^2 + 2x - 4$ te ontbinden in $(x + 1 - \sqrt{5})(x + 1 + \sqrt{5})$.

Elke tweedegraadsfunctie met $D > 0$ is ook met behulp van kwadraatafsplitsen te ontbinden.
Zo is $x^2 + 2x - 4 = (x + 1)^2 - 5 = (x + 1 + \sqrt{5})(x + 1 - \sqrt{5})$.
Herken in de laatste stap het merkwaardige product
$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$.

Terugblik

Staartdelen

$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \dots + a_2x^2 + a_1x + a_0$ met $a_n \neq 0$ is een polynoom van graad n.
Elke functie f die het quotiënt is van twee polynomen waarbij de graad van de teller groter dan of gelijk is aan de graad van de noemer, is met behulp van een staartdeling te herleiden tot de vorm $f(x) = p(x) + \dfrac{q(x)}{r(x)}$ waarbij $p(x)$ en $q(x)$ polynomen zijn en de graad van $q(x)$ kleiner is dan de graad van $r(x)$.

Bij $f(x) = \dfrac{x^4 + 2x^3 + 4}{x^2 + 2x + 1}$ geeft de staartdeling $f(x) = x^2 - 1 + \dfrac{2x + 5}{x^2 + 2x + 1}$.

$$\begin{array}{l}
x^2 + 2x + 1 \,/\, x^4 + 2x^3 \qquad\qquad + 4 \,\backslash\, x^2 - 1 \\
\qquad\qquad\quad \underline{x^4 + 2x^3 + x^2} \, - \\
\qquad\qquad\qquad\qquad -x^2 \qquad + 4 \\
\qquad\qquad\qquad\qquad \underline{-x^2 - 2x - 1} \, - \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 2x + 5
\end{array}$$

Primitieven van $f(x) = \dfrac{p(x)}{ax + b}$ met $p(x)$ een polynoom en $a \neq 0$

Bij $f(x) = \dfrac{x^2 + 4x + 1}{2x + 3}$ geeft de staartdeling $f(x) = \frac{1}{2}x + 1\frac{1}{4} - \dfrac{2\frac{3}{4}}{2x + 3}$.

Dus $F(x) = \frac{1}{4}x^2 + 1\frac{1}{4}x - 1\frac{3}{8}\ln|2x + 3| + c$.

Primitieven van $f(x) = \dfrac{l(x)}{x^2 + bx + c}$ met $l(x)$ een lineaire functie

We onderscheiden voor de discriminant D van de noemer drie gevallen.

I $\quad D < 0 \quad f(x) = \dfrac{x + 4}{x^2 + 6x + 10} = \dfrac{\frac{1}{2}(2x + 6) + 1}{x^2 + 6x + 10} = \dfrac{\frac{1}{2}(2x + 6)}{x^2 + 6x + 10} + \dfrac{1}{(x + 3)^2 + 1}$

Dus $F(x) = \frac{1}{2}\ln|x^2 + 6x + 10| + \arctan(x + 3) + c$.

II $\quad D = 0 \quad f(x) = \dfrac{2x + 5}{x^2 + 2x + 1} = \dfrac{2x + 5}{(x + 1)^2} = \dfrac{2(x + 1) + 3}{(x + 1)^2} = \dfrac{2}{x + 1} + \dfrac{3}{(x + 1)^2}$

$= \dfrac{2}{x + 1} + 3(x + 1)^{-2}$

Dus $F(x) = 2\ln|x + 1| - 3(x + 1)^{-1} + c = 2\ln|x + 1| - \dfrac{3}{x + 1} + c$.

III $\quad D > 0 \quad f(x) = \dfrac{-6x + 14}{x^2 + 2x - 3} = \dfrac{-6x + 14}{(x - 1)(x + 3)}$

$= \dfrac{a}{x - 1} + \dfrac{b}{x + 3} = \dfrac{a(x + 3) + b(x - 1)}{(x - 1)(x + 3)}$

$= \dfrac{(a + b)x + 3a - b}{(x - 1)(x + 3)} = \dfrac{2}{x - 1} - \dfrac{8}{x + 3}$

Dus $F(x) = 2\ln|x - 1| - 8\ln|x + 3| + c$.

$$\begin{cases} a + b = -6 \\ 3a - b = 14 \end{cases} +$$
$$4a = 8$$
$$\left.\begin{array}{l} a = 2 \\ a + b = -6 \end{array}\right\} \begin{array}{l} 2 + b = -6 \\ b = -8 \end{array}$$

K.5 Integralen bij parameterkrommen

068 Je weet $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$.

a Bewijs dat $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x$.

b Bewijs dat $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x$.

069 In figuur K.18 is de baan van punt P getekend bij de bewegingsvergelijkingen $\begin{cases} x(t) = -\frac{1}{2}t^2 + 2t \\ y(t) = -\frac{1}{2}t^2 + 2 \end{cases}$

De baan snijdt de x-as voor $t = 2$ in het punt B en de y-as voor $t = 0$ in het punt A en voor $t = 4$ in het punt C.
Het vlakdeel V wordt ingesloten door de baan en de y-as.

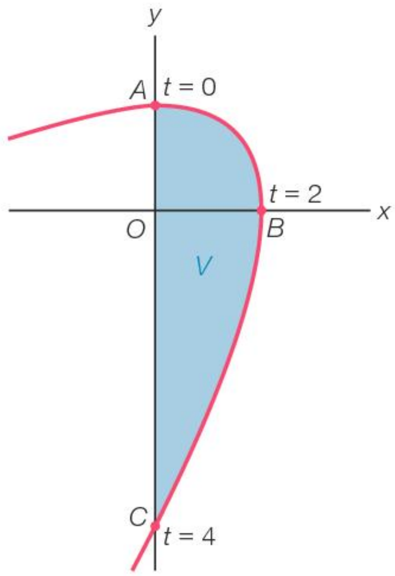
Er geldt $O(V) = \int_{x_A}^{x_B} y\,\mathrm{d}x - \int_{x_C}^{x_B} y\,\mathrm{d}x$.

a Licht toe dat hieruit volgt dat $O(V) = \int_{t=0}^{t=2} y\,\mathrm{d}x - \int_{t=4}^{t=2} y\,\mathrm{d}x$ en gebruik de regels van opgave 68 om $O(V)$ te herleiden tot $O(V) = \int_{t=0}^{t=4} y\,\mathrm{d}x$.

b Uit vraag a volgt $O(V) = \int_{t=0}^{t=4} (-\frac{1}{2}t^2 + 2)\,\mathrm{d}(-\frac{1}{2}t^2 + 2t)$.

Bereken $O(V)$.

c Laat met een berekening zien dat $O(V) = \int_{t=4}^{t=0} x\,\mathrm{d}y$ hetzelfde antwoord geeft als bij vraag b.



figuur K.18

Theorie A Oppervlakten en inhouden bij parameterkrommen

In opgave 69 heb je gezien dat de oppervlakte van het vlakdeel V dat ingesloten wordt door de parameterkromme en de y-as kan worden berekend met de integraal $\int_{t=0}^{t=4} y\,\mathrm{d}x$.

Hierbij zijn de regels gebruikt, die je in opgave 68 hebt bewezen.

$$\int_a^b y\,\mathrm{d}x = -\int_b^a y\,\mathrm{d}x$$

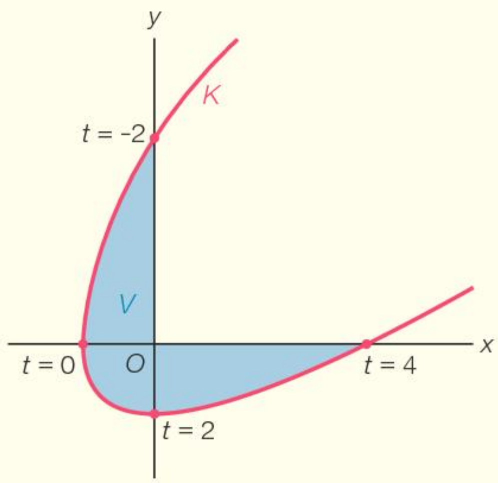
$$\int_a^b y\,\mathrm{d}x + \int_b^c y\,\mathrm{d}x = \int_a^c y\,\mathrm{d}x$$

Zoals je weet, werk je bij een integraal van de vorm $\int y\,\mathrm{d}x$ altijd 'van links naar rechts' en bij een integraal van de vorm $\int x\,\mathrm{d}y$ altijd 'van beneden naar boven'.
Kies de waarden van t bij de integraal zo, dat deze richtingen kloppen.
Een integraal $\int y\,\mathrm{d}x$ is dan positief als $y \geq 0$ en negatief als $y \leq 0$.
En een integraal $\int x\,\mathrm{d}y$ is dan positief als $x \geq 0$ en negatief als $x \leq 0$.

Voorbeeld

De kromme K is gegeven door $\begin{cases} x(t) = \frac{1}{2}t^2 - 2 \\ y(t) = \frac{1}{2}t^2 - 2t \end{cases}$

Het vlakdeel V wordt ingesloten door K, de positieve x-as en de positieve y-as. Zie figuur K.19.
Bereken exact de oppervlakte van V.



figuur K.19

Aanpak

Bedenk dat $O(V) = \int_{t=0}^{t=-2} y\,\mathrm{d}x - \int_{t=0}^{t=4} y\,\mathrm{d}x$ en herleid deze vorm tot één integraal.

Uitwerking

$$O(V) = \int_{t=0}^{t=-2} y\,\mathrm{d}x - \int_{t=0}^{t=4} y\,\mathrm{d}x = \int_{t=0}^{t=-2} y\,\mathrm{d}x + \int_{t=4}^{t=0} y\,\mathrm{d}x = \int_{t=4}^{t=-2} y\,\mathrm{d}x$$

$$= \int_{t=4}^{t=-2} (\tfrac{1}{2}t^2 - 2t)\,\mathrm{d}(\tfrac{1}{2}t^2 - 2) = \int_4^{-2} (\tfrac{1}{2}t^2 - 2t) \cdot t\,\mathrm{d}t = \int_4^{-2} (\tfrac{1}{2}t^3 - 2t^2)\,\mathrm{d}t$$

$$= \left[\tfrac{1}{8}t^4 - \tfrac{2}{3}t^3\right]_4^{-2} = \tfrac{1}{8} \cdot (-2)^4 - \tfrac{2}{3} \cdot (-2)^3 - (\tfrac{1}{8} \cdot 4^4 - \tfrac{2}{3} \cdot 4^3)$$

$$= 2 + \tfrac{16}{3} - 32 + \tfrac{128}{3} = 18$$

70 Zie het voorbeeld.

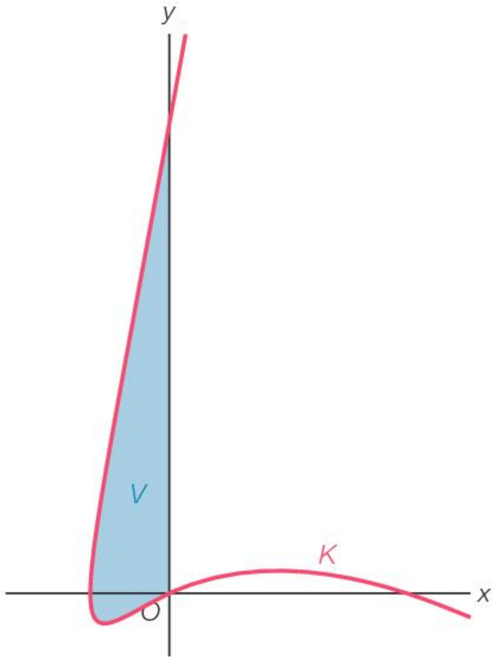
a Gebruik de regels bovenaan deze bladzijde om aan te tonen dat $\int_{t=-2}^{t=4} x\,\mathrm{d}y$ ook de oppervlakte van V oplevert.

b Bereken exact de inhoud van het lichaam L dat ontstaat als het gedeelte van V dat zich links van de y-as bevindt wentelt om de y-as.

71 De kromme K is gegeven door $\begin{cases} x(t) = t^2 - 2t \\ y(t) = t^3 - t \end{cases}$

Het vlakdeel V wordt ingesloten door K en de y-as. Zie figuur K.20.

Bereken exact de oppervlakte van V.

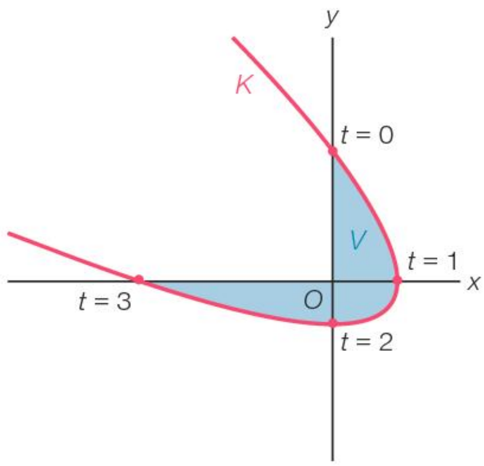


figuur K.20

A72 De kromme K is gegeven door $\begin{cases} x(t) = -t^2 + 2t \\ y(t) = \frac{2}{3}t^2 - 2\frac{2}{3}t + 2 \end{cases}$

Het vlakdeel V wordt ingesloten door K, de negatieve x-as en de positieve y-as. Zie figuur K.21.

Bereken exact de oppervlakte van V.



figuur K.21

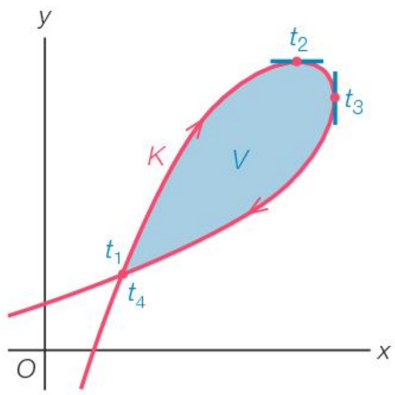
073 In figuur K.22 is een kromme K getekend die zichzelf snijdt voor $t = t_1$ en $t = t_4$. Zo wordt het vlakdeel V ingesloten. Dit vlakdeel wordt in negatieve richting omlopen.
We vragen ons af hoe we de oppervlakte van V kunnen berekenen.

a Licht toe dat

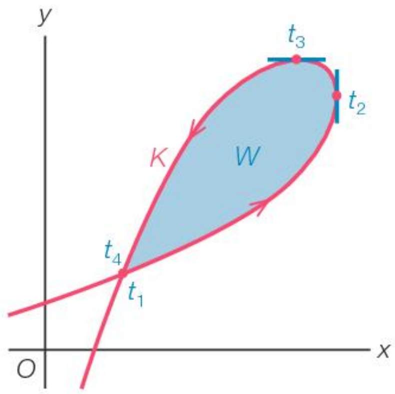
$$O(V) = \int_{t=t_1}^{t=t_3} y\,\mathrm{d}x - \int_{t=t_4}^{t=t_3} y\,\mathrm{d}x \text{ en herleid dit tot } \int_{t=t_1}^{t=t_4} y\,\mathrm{d}x.$$

b Licht toe dat

$$O(V) = \int_{t=t_4}^{t=t_2} x\,\mathrm{d}y - \int_{t=t_1}^{t=t_2} x\,\mathrm{d}y \text{ en herleid dit tot } \int_{t=t_4}^{t=t_1} x\,\mathrm{d}y.$$



figuur K.22

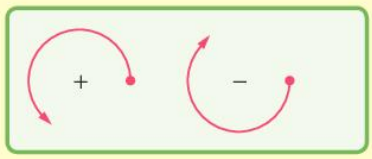


figuur K.23

In figuur K.23 is een kromme getekend die het vlakdeel W insluit. W wordt in positieve richting omlopen.

c Beredeneer dat $O(W) = \int_{t=t_4}^{t=t_1} y\,\mathrm{d}x$ en dat $O(W) = \int_{t=t_1}^{t=t_4} x\,\mathrm{d}y$.

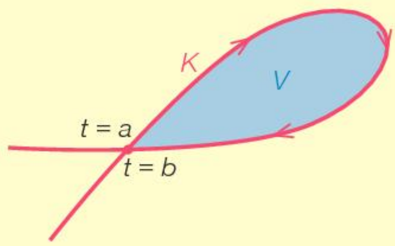
Theorie B Oppervlakten en inhouden van omsloten vlakdelen



In opgave 73 heb je onderzocht hoe je de oppervlakte kunt berekenen van een door een kromme omsloten vlakdeel V. De grenzen van de integraal waarmee je de oppervlakte berekent, zijn de t-waarden die bij het punt horen waar de kromme zichzelf snijdt.
Zijn deze waarden $t = a$ en $t = b$ met $a < b$, dan geldt voor de oppervlakte V

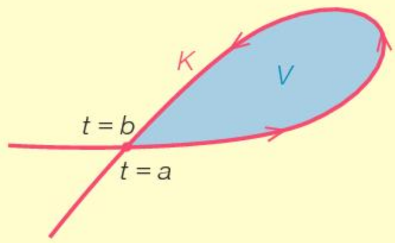
- als V in negatieve richting wordt omlopen dan geldt

$$O(V) = \int_{t=a}^{t=b} y\,\mathrm{d}x \text{ of } O(V) = \int_{t=b}^{t=a} x\,\mathrm{d}y.$$



- als V in positieve richting wordt omlopen dan geldt

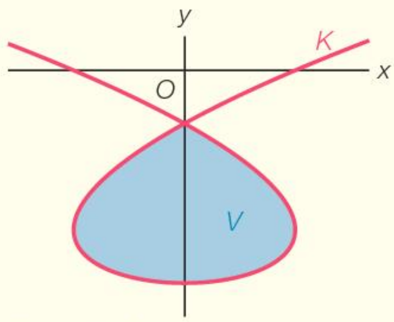
$$O(V) = \int_{t=b}^{t=a} y\,\mathrm{d}x \text{ of } O(V) = \int_{t=a}^{t=b} x\,\mathrm{d}y.$$



Omdat je dus altijd kunt kiezen tussen $\int x\,\mathrm{d}y$ en $\int y\,\mathrm{d}x$ neem je de integraal die het eenvoudigst te berekenen is.

Voorbeeld

De kromme K die gegeven is door $\begin{cases} x(t) = 3t - t^3 \\ y(t) = t^2 - 4 \end{cases}$ sluit een vlakdeel V in. Zie figuur K.24.
Bereken exact de oppervlakte van V.



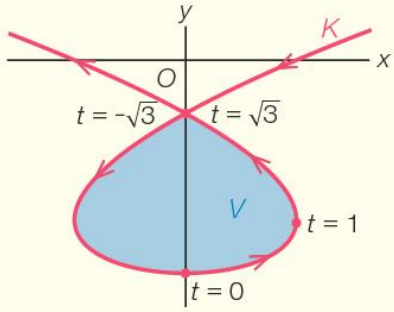
figuur K.24

Aanpak

Omdat $\int x\,\mathrm{d}y$ eenvoudiger is dan $\int y\,\mathrm{d}x$ kies je $\int x\,\mathrm{d}y$.

Bereken de grenzen t_1 en t_2 van de integraal en onderzoek of je $\int\limits_{t=t_1}^{t=t_2} x\,\mathrm{d}y$ of $\int\limits_{t=t_2}^{t=t_1} x\,\mathrm{d}y$ moet hebben.

Uitwerking



$x(t) = 0$ geeft $3t - t^3 = 0$

$t(3 - t^2) = 0$

$t = 0 \vee t^2 = 3$

$t = 0 \vee t = \sqrt{3} \vee t = -\sqrt{3}$

$t = 0$ geeft $(0, -4)$.
$t = \sqrt{3}$ en $t = -\sqrt{3}$ geven $(0, -1)$.
$t = 1$ geeft $(2, -3)$.
Dus V wordt in positieve richting omlopen.

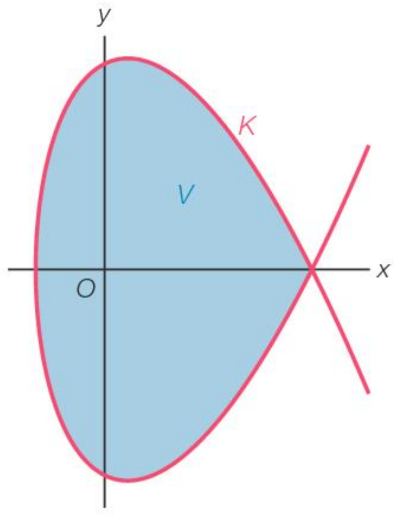
$$O(V) = \int\limits_{t=-\sqrt{3}}^{t=\sqrt{3}} x\,\mathrm{d}y = \int\limits_{t=-\sqrt{3}}^{t=\sqrt{3}} (3t - t^3)\,\mathrm{d}(t^2 - 4) = \int\limits_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} (3t - t^3) \cdot 2t\,\mathrm{d}t = \int\limits_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} (6t^2 - 2t^4)\,\mathrm{d}t$$

$$= \left[2t^3 - \tfrac{2}{5}t^5\right]_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} = 2 \cdot 3\sqrt{3} - \tfrac{2}{5} \cdot 9\sqrt{3} - (2 \cdot -3\sqrt{3} - \tfrac{2}{5} \cdot -9\sqrt{3})$$

$$= 6\sqrt{3} - \tfrac{18}{5}\sqrt{3} + 6\sqrt{3} - \tfrac{18}{5}\sqrt{3} = 4\tfrac{4}{5}\sqrt{3}$$

74 De kromme K is gegeven door $\begin{cases} x(t) = t^2 - 1 \\ y(t) = 4t - t^3 \end{cases}$
De kromme is symmetrisch in de x-as.
Het vlakdeel V wordt ingesloten door K.
Zie figuur K.25.

a Bereken exact de oppervlakte van V.
b Bereken exact de inhoud van het lichaam L dat ontstaat als V wentelt om de x-as.

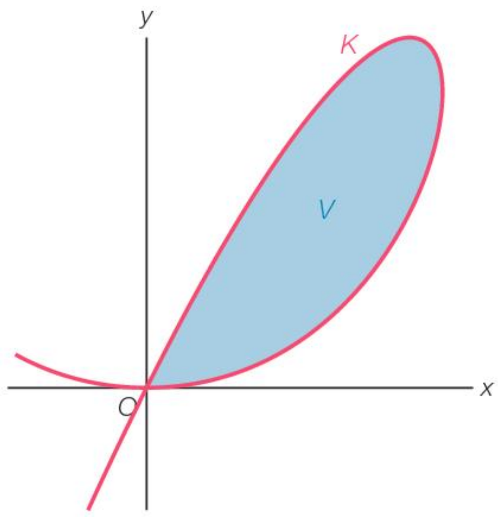


figuur K.25

75 In figuur K.26 zie je de kromme

$K: \begin{cases} x(t) = -t^2 + 6t \\ y(t) = -\frac{1}{3}t^3 + 2t^2 \end{cases}$

Bereken exact de oppervlakte van het door K omsloten vlakdeel V.

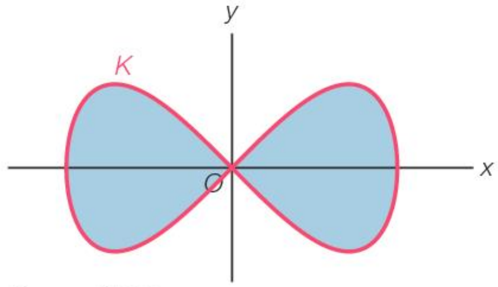


figuur K.26

A76 De kromme K is gegeven door $\begin{cases} x(t) = 2\sin(t) \\ y(t) = \sin(2t) \end{cases}$ met $0 \leq t \leq 2\pi$. De kromme is symmetrisch in de x-as en in de y-as. K sluit twee vlakdelen in. Zie figuur K.27.

a Bereken exact de totale oppervlakte van deze vlakdelen.

b Bereken exact de inhoud van het lichaam L dat ontstaat als deze vlakdelen wentelen om de x-as.



figuur K.27

A77 De kromme K is gegeven door $\begin{cases} x(t) = 2\sin(t) \\ y(t) = \frac{1}{2}t^2 \end{cases}$ met $-\pi \leq t \leq \pi$.

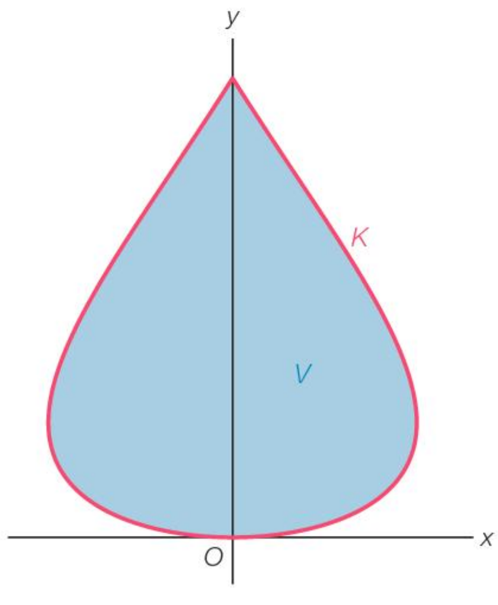
Het vlakdeel V wordt ingesloten door K.

Zie figuur K.28.

Bereken exact

a de oppervlakte van V

b de inhoud van het lichaam L dat ontstaat als V om de y-as wentelt.



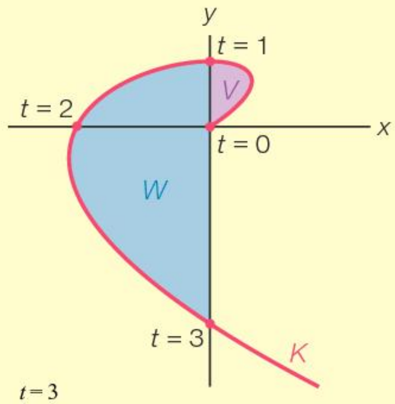
figuur K.28

Terugblik

Oppervlakte bij parameterkrommen

In de figuur hiernaast is de kromme K: $\begin{cases} x(t) = t^3 - 4t^2 + 3t \\ y(t) = 2t - t^2 \end{cases}$

met $t \geq 0$ getekend.
Verder zie je de vlakdelen V en W.



Er geldt $O(V) = \int_{t=0}^{t=1} x\,\mathrm{d}y$, want V zit rechts van de y-as.

Verder geldt $O(W) = -\int_{t=3}^{t=1} x\,\mathrm{d}y$, want W zit links van de y-as.

Er geldt dus $O(V + W) = \int_{t=0}^{t=1} x\,\mathrm{d}y - \int_{t=3}^{t=1} x\,\mathrm{d}y = \int_{t=0}^{t=1} x\,\mathrm{d}y + \int_{t=1}^{t=3} x\,\mathrm{d}y = \int_{t=0}^{t=3} x\,\mathrm{d}y.$

Je krijgt

$$O(V + W) = \int_{t=0}^{t=3} (t^3 - 4t^2 + 3t)\,\mathrm{d}(2t - t^2) = \int_0^3 (t^3 - 4t^2 + 3t)(2 - 2t)\,\mathrm{d}t$$

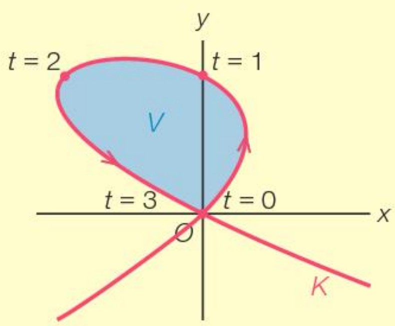
$$= \int_0^3 (-2t^4 + 10t^3 - 14t^2 + 6t)\,\mathrm{d}t = \left[-\tfrac{2}{5}t^5 + 2\tfrac{1}{2}t^4 - 4\tfrac{2}{3}t^3 + 3t^2\right]_0^3 = 6\tfrac{3}{10}.$$

Oppervlakte bij omsloten vlakdelen

In de figuur hiernaast is de kromme K: $\begin{cases} x(t) = t^3 - 4t^2 + 3t \\ y(t) = 3t - t^2 \end{cases}$

getekend.
K sluit het vlakdeel V in.
Omdat V in positieve richting wordt omlopen, bereken je

$O(V)$ met de integraal $\int_{t=0}^{t=3} x\,\mathrm{d}y$.

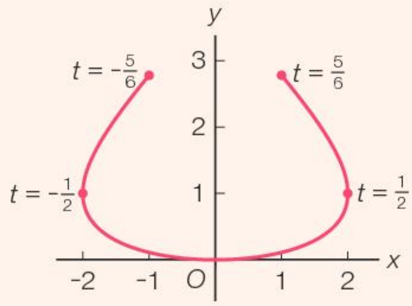


$$O(V) = \int_{t=0}^{t=3} x\,\mathrm{d}y = \int_{t=0}^{t=3} (t^3 - 4t^2 + 3t)\,\mathrm{d}(3t - t^2) = \int_0^3 (t^3 - 4t^2 + 3t)(3 - 2t)\,\mathrm{d}t$$

$$= \int_0^3 (-2t^4 + 11t^3 - 18t^2 + 9t)\,\mathrm{d}t = \left[-\tfrac{2}{5}t^5 + 2\tfrac{3}{4}t^4 - 6t^3 + 4\tfrac{1}{2}t^2\right]_0^3 = 4\tfrac{1}{20}$$

Eindopdracht Mand van glas

In de beginopdracht heb je met numerieke integralen gerekend aan een mand van glas waarvan het vooraanzicht een kromme is die beschreven kan worden met de formules $x(t) = 2\sin(\pi t)$ en $y_p(t) = pt^2$ met x en y in dm, $p > 0$ en $-\frac{5}{6} \leq t \leq \frac{5}{6}$. Hiernaast zie je nog eens het vooraanzicht voor $p = 4$.



In de beginopdracht heb je met een numerieke integraal berekend dat voor $p = 4$ de oppervlakte van het vlakdeel V ongeveer gelijk is aan 9,0 dm². Hierbij is V het vlakdeel dat wordt ingesloten door de kromme en de lijn door de bovenkanten van de kromme.

- Bereken exact voor $p = 4$ de oppervlakte van V.

Er geldt

$$\int 4\sin^2(\pi t)\,\mathrm{d}pt^2 = 2pt^2 - \frac{2pt}{\pi} \cdot \sin(2\pi t) - \frac{p}{\pi^2} \cdot \cos(2\pi t).$$

- Bewijs dit.

In de beginopdracht heb je met een numerieke integraal berekend dat voor $p = 4$ de inhoud van het lichaam L dat ontstaat als V wentelt om de y-as ongeveer gelijk is aan 23,9 dm³.

- Bereken exact voor $p = 4$ de inhoud van L.

In de beginopdracht heb je met numerieke integralen berekend dat voor $p \approx 8{,}4$ de inhoud van het lichaam L gelijk is aan 50 dm³.

- Bereken deze waarde van p in drie decimalen.

Diagnostische toets

K.1 De substitutiemethode

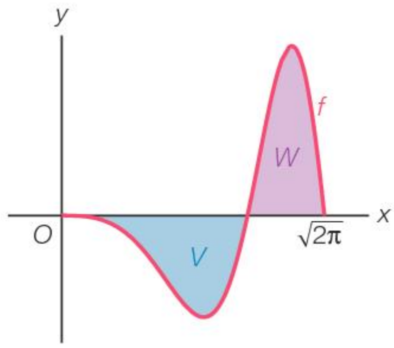
1 Primitiveer.

a $f(x) = 3x\sqrt{x^2+2}$ **b** $f(x) = 3x^2\cos(x^3+2)$ **c** $f(x) = (4x+6)\ln(x^2+3x)$

2 Bereken exact.

a $\int_1^{e} \frac{\sqrt{\ln(x)}}{x}\,dx$ **b** $\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \cos(x)\sin^3(x)\,dx$ **c** $\int_1^{3} \frac{6x}{x^2+1}\,dx$

3 Gegeven is de functie $f(x) = -2x\sin(x^2)$ met domein $[0, \sqrt{2\pi}]$.
De grafiek van f en de x-as sluiten twee vlakdelen in.
Zie figuur K.29.
Bewijs dat de oppervlakten van deze vlakdelen gelijk zijn.



figuur K.29

K.2 Partieel integreren

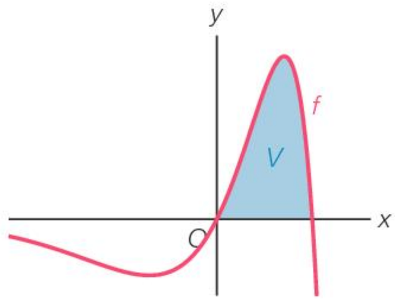
4 Primitiveer.

a $f(x) = 4x\sin(2x)$ **b** $g(x) = x^2\ln(x)$

5 Gegeven is de functie $f(x) = (2x - x^2)e^x$.

a Bereken exact de extreme waarden van f.

b Bereken exact de oppervlakte van het vlakdeel V dat wordt ingesloten door de grafiek van f en de x-as.



figuur K.30

6 Primitiveer.

a $f(x) = 4x^2\sin(2x)$ **b** $g(x) = e^x\sin(2x)$

K.3 Cyclometrische functies

7 Bereken exact.

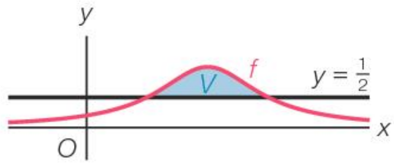
a $\int_0^{2\sqrt{3}} \frac{4}{x^2+4}\,dx$ **c** $\int_{-1}^{1} \frac{3x^2}{x^6+1}\,dx$

b $\int_1^{2} \frac{1}{x^2-2x+2}\,dx$ **d** $\int_0^{1} \frac{\arctan^2(x)}{x^2+1}\,dx$

8 Gegeven is de functie $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 4x + 5}$.

a Bereken exact de oppervlakte van het vlakdeel V dat wordt ingesloten door de grafiek van f en de lijn $y = \frac{1}{2}$.

b Het vlakdeel W wordt ingesloten door de grafiek van f, de x-as en de lijnen $x = 2$ en $x = p$ met $p > 2$ waarbij $O(W) = \frac{1}{3}\pi$.
Bereken exact de waarde van p.



figuur K.31

9 Primitiveer.

a $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1 - 4x^2}}$ **b** $g(x) = \dfrac{5x^4}{\sqrt{1 - x^{10}}}$

K.4 Breuksplitsen

10 Bereken exact.

a $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{3x + 4}{x + 4}\,\mathrm{d}x$ **b** $\displaystyle\int_{1}^{3} \frac{x^3 - x + 1}{x + 1}\,\mathrm{d}x$

11 Gegeven is de functie $f(x) = \dfrac{x^2 - 3x}{x + 1}$.

a Bereken exact de extreme waarden van f.

b Bereken exact de oppervlakte van het vlakdeel V dat wordt ingesloten door de grafiek van f en de x-as.

12 Primitiveer.

a $f(x) = \dfrac{2x + 3}{x^2 - 6x + 10}$ **b** $g(x) = \dfrac{x^2 + 4x}{x^2 - 4x + 4}$ **c** $h(x) = \dfrac{6}{x^2 - 1}$

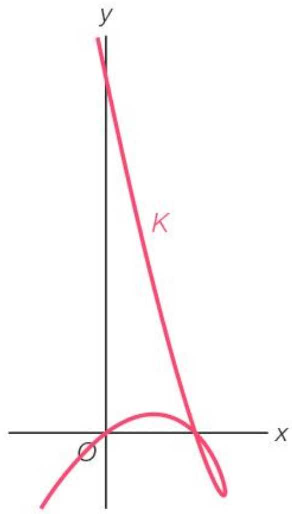
K.5 Integralen bij parameterkrommen

13 In figuur K.32 zie je de kromme $K: \begin{cases} x(t) = 4t - t^2 \\ y(t) = t^3 - 4t^2 + 3t \end{cases}$

die zichzelf snijdt op de x-as.

a Bereken exact de oppervlakte van het vlakdeel V dat wordt ingesloten door de kromme en de y-as.

b Bereken exact de oppervlakte van het vlakdeel W dat wordt omsloten door de kromme.



figuur K.32

Gemengde opgaven

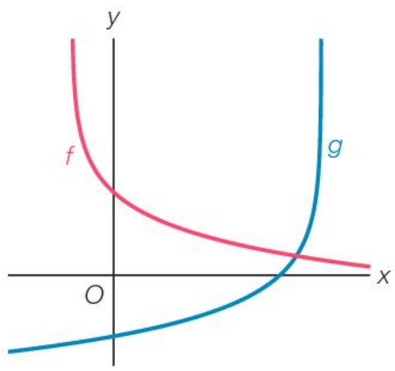
9 Exponentiële en logaritmische functies

1 Gegeven zijn de functies $f(x) = 2 - {}^{3}\log(x + 1)$ en $g(x) = {}^{\frac{1}{3}}\log(5 - x)$.

a Los exact op $f(x) \geq g(x)$.

b De grafieken van f en g snijden van de lijn $y = 3$ het lijnstuk AB en van de lijn $x = 2$ het lijnstuk CD af. Onderzoek algebraïsch of AB meer dan drie keer zo lang is als CD.

c Op de grafiek van f ligt het punt P waarin de raaklijn evenwijdig is met de lijn $y = -x$. Bewijs dat $x_P = \dfrac{1 - \ln(3)}{\ln(3)}$.



figuur G.1

2 Los algebraïsch op.

a $4^{\log(x)} = 2^{3 + \log(x)}$

b ${}^{8}\log(2x + 1) = {}^{4}\log(25)$

c ${}^{5}\log^{2}(x + 2) = 6 \cdot {}^{5}\log(x + 2) + 7$

d $2 \cdot {}^{3}\log(2x - 3) + {}^{\frac{1}{3}}\log(2x + 1) = 2$

3 Bereken exact de oplossingen.

a $\ln^{2}(x) + 1 = 2\frac{1}{2}\ln(x)$

b $\dfrac{e^{x}}{e^{x} - 2} = 2$

c $\ln(3x + 2) = \frac{1}{2}$

d $\ln(4x) - \ln(x + 4) = 1$

e $\ln^{2}(x - 2) = 4$

f $3\,e^{2x} + 2 = 5\,e^{x}$

4 **a** Een hoeveelheid neemt jaarlijks met 9,6% toe. Bereken de verdubbelingstijd in maanden nauwkeurig.

b Een hoeveelheid neemt per dag met 17% af. Bereken de halveringstijd in uren nauwkeurig.

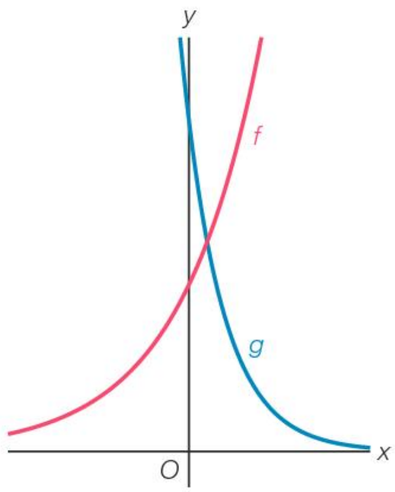
c Een hoeveelheid verdubbelt elke maand. Hoeveel procent is de toename per dag?

d De halveringstijd van een hoeveelheid is 8,3 dagen. Na hoeveel dagen is er nog 1% over?

5 Gegeven zijn de functies $f(x) = 3 \cdot 2^{x}$ en $g(x) = 6 \cdot (\frac{1}{4})^{x}$.

a Los exact op $f(x) \leq g(x)$.

b Bewijs dat de functie $h(x) = f(x) + g(x)$ een minimum heeft voor $x = \frac{2}{3}$.



figuur G.2

6 Differentieer.

a $f(x) = x^2\, e^{x-1}$

b $g(x) = \ln^2(x) + \ln(x^2)$

c $h(x) = {}^2\log(x^3 - x^2)$

d $j(x) = \ln(\ln(2x))$

7 Gegeven zijn de functies $f(x) = e^{3x-1}$ en $g(x) = \ln(x^2)$.

a Welke vermenigvuldiging ten opzichte van de x-as levert bij de grafiek van f dezelfde beeldfiguur op als de translatie $(2, 0)$?

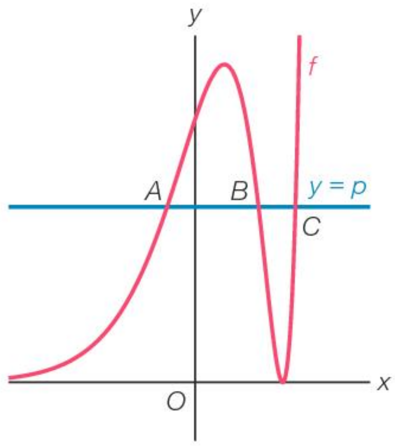
b Welke translatie levert bij de grafiek van g dezelfde beeldfiguur op als de vermenigvuldiging ten opzichte van de y-as met 3?

8 Gegeven is de functie $f(x) = (x-3)^2 e^x$.

a Bereken exact de coördinaten van de toppen van de grafiek van f.

b Bereken exact de x-coördinaten van de buigpunten van de grafiek van f.

c De lijn $y = p$ snijdt de grafiek van links naar rechts in de punten A, B en C. Zie figuur G.3.
Bereken voor welke p de afstand tussen A en B gelijk is aan 3. Rond af op twee decimalen.



figuur G.3

9 Voor elke p is gegeven de functie $f_p(x) = x^p \cdot \ln(x)$.

a Bereken exact de extreme waarde van f_{-2}.

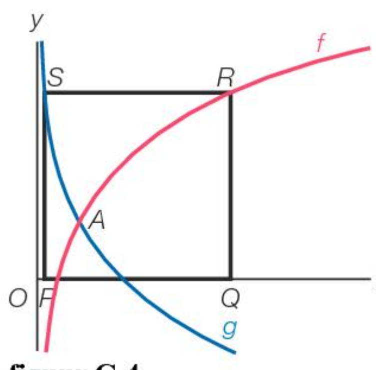
b Bereken algebraïsch de x-coördinaat van het buigpunt van de grafiek van f_3.

c Bereken exact voor welke waarde van p de y-coördinaat van de top van de grafiek van f_p gelijk is aan $\frac{1}{3}$e.

10 Gegeven zijn de functies $f(x) = \ln(4x)$ en $g(x) = \ln\left(\frac{1}{x}\right)$.

a De grafieken van f en g snijden elkaar in het punt A. De raaklijnen van de grafieken van f en g in A snijden van de y-as een lijnstuk af.
Bereken algebraïsch de lengte van dit lijnstuk.

b In de figuur hiernaast is $PQRS$ een vierkant. De punten P en Q liggen op de x-as, het punt R ligt op de grafiek van f en het punt S ligt op de grafiek van g.
Bereken de x-coördinaat van P in drie decimalen.



figuur G.4

11 **a** Herleid de formule $p = 10\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t+1}$ tot de vorm $t = \ln(ap^b)$.

b Herleid de formule $y = 3\ln\left(\frac{2}{x}\right) + 2\ln(5x)$ tot de vorm $x = a\,\mathrm{e}^{by}$.

c Druk x uit in y bij de formule $y = \mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{x+1} + \mathrm{e}^{x+2} + \mathrm{e}^{x+3}$ en bewijs dat het antwoord te herleiden is tot $x = \ln\left(\frac{\mathrm{e}-1}{\mathrm{e}^4-1}y\right)$.

10 Meetkunde met vectoren

12 Gegeven zijn het punt $A(1, 3)$ en de lijnen k: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix}$ en l: $3x + 2y = 10$.

a Bereken de coördinaten van het snijpunt S van k en l.

b Stel een vergelijking op van de lijn m door A die k loodrecht snijdt.

c Bereken de hoek tussen k en l.

d Het punt P ligt zo op k dat de lijn AP evenwijdig is met l.
Bereken exact de coördinaten van P.

13 Gegeven zijn de lijnen k: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$, l: $x + 3y = 12$ en m: $x = 2u - 6 \wedge y = -5u + 4$.

a Bereken de hoek tussen k en m.

b Bereken de coördinaten van het snijpunt S van k en m.

c Stel een vergelijking op van de lijn n door de oorsprong die loodrecht staat op m.

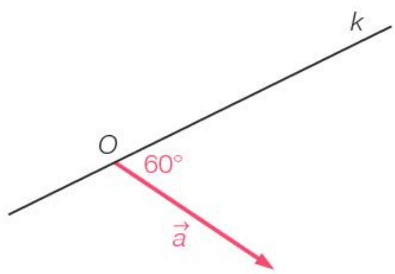
d Bereken de coördinaten van het snijpunt T van k met de lijn p door $A(6, 8)$ die loodrecht staat op l.

14 Gegeven is de vector $\vec{a}$ die een hoek van 60° maakt met de lijn k. Zie figuur G.5. Verder is gegeven dat vector $\vec{b}$ op k ligt en dat $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$.

a Teken mogelijke vectoren $\vec{b}$ en $\vec{c}$ in het geval $|\vec{a}| = |\vec{c}|$.

b Teken mogelijke vectoren $\vec{b}$ en $\vec{c}$ in het geval $|\vec{c}| = \sqrt{3} \cdot |\vec{b}|$.

c Bewijs dat $|\vec{c}| = \sqrt{3} \cdot |\vec{a}|$ of $|\vec{c}| = \sqrt{7} \cdot |\vec{a}|$ in het geval $|\vec{b}| = 2 \cdot |\vec{a}|$.

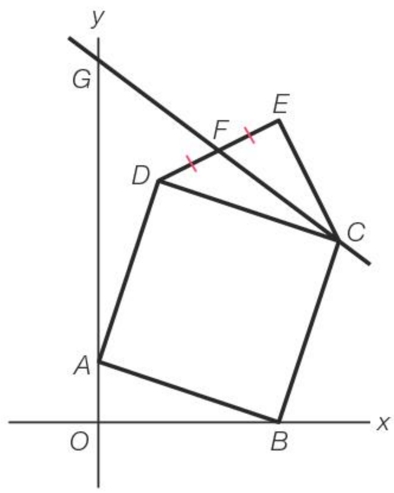


figuur G.5

15 De punten $A(0, 1)$ en $B(3, 0)$ zijn hoekpunten van het vierkant $ABCD$. Op de zijde CD is de naar buiten gerichte gelijkbenige rechthoekige driehoek CED geplaatst. Verder is F het midden van DE. Zie figuur G.6.

a Bereken de coördinaten van E.

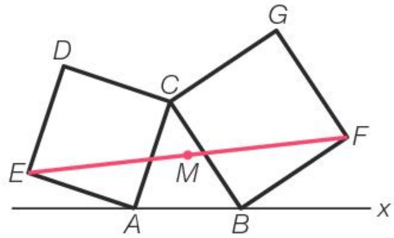
b De lijn CF snijdt de y-as in het punt G. Bewijs dat $CG = 5$.



figuur G.6

16 Gegeven is driehoek ABC met $A(a, 0)$, $B(b, 0)$ en $C(c, d)$. Op de zijden AC en BC worden de naar buiten gerichte vierkanten $ACDE$ en $BFGC$ geplaatst.

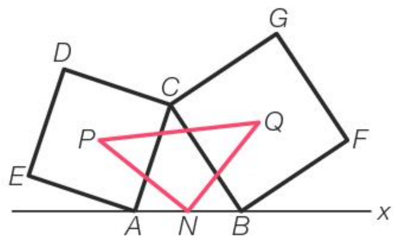
a Het punt M is het midden van het lijnstuk EF. Druk de coördinaten van M uit in a en b.



figuur G.7

De punten P en Q zijn de middens van de vierkanten $ACDE$ en $BFGC$. Het punt N is het midden van het lijnstuk AB.

b Bewijs dat driehoek PQN een gelijkbenige rechthoekige driehoek is.

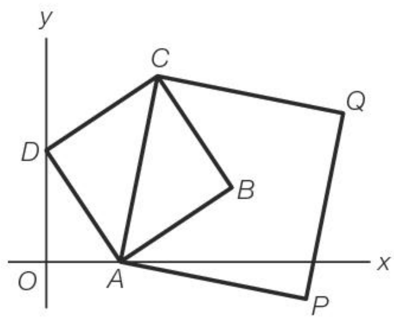


figuur G.8

17 De punten $A(a, 0)$ en $D(0, d)$ zijn hoekpunten van het vierkant $ABCD$. Hierbij is $a > 0$ en $d > 0$. Op de diagonaal AC wordt het vierkant $APQC$ geplaatst. Zie figuur G.9. Bereken a en d in het geval

a P het punt $(10, -1)$ is

b P op de lijn $x + y = 6$ en Q op de parabool $y = \frac{1}{2}x^2$ ligt.



figuur G.9

18 Gegeven zijn de punten $A(-1, 5)$, $B(2, -1)$, $C(5, 8)$ en $D(99, -195)$.

a Onderzoek of het punt D op de lijn AB ligt.

b Bereken de coördinaten van het snijpunt S van de lijn BC en de lijn k door A loodrecht op BC.

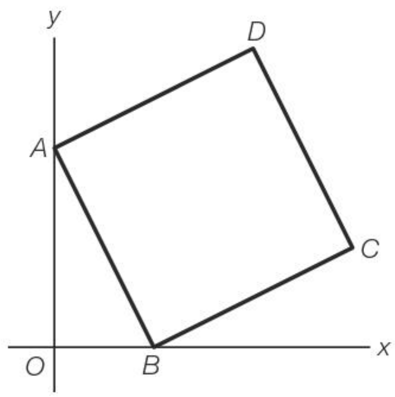
c Bereken de coördinaten van de punten P waarvoor geldt $AP = BP$ en $\angle APB = 90°$.

d Voor welke waarden van p en q is $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p \\ 38 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} q \\ 3 \end{pmatrix}$ een vectorvoorstelling van de lijn BC?

19 Gegeven zijn de punten $A(0, 16)$ en $B(8, 0)$ en het vierkant $ABCD$. Zie figuur G.10. Verder is gegeven het punt $P(22, 12)$.

a Toon aan dat P op de zijde CD ligt.

b Het punt Q ligt op de lijn AP waarbij DQ loodrecht op AP staat.
Bereken exact de coördinaten van Q.



figuur G.10

20 De bewegingsvergelijkingen van een punt P zijn gegeven door $\begin{cases} x(t) = t^2 - 4t \\ y(t) = t^4 - 4t^3 + 4t^2 \end{cases}$

Zie figuur G.11.

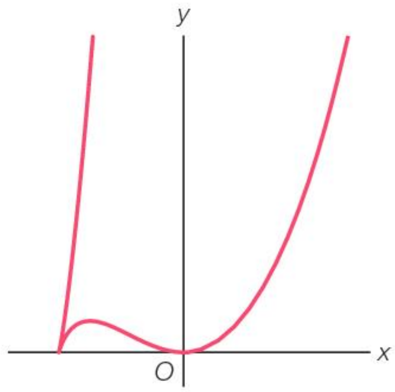
a Bereken de coördinaten van de punten waarin de raaklijn evenwijdig is met de x-as of met de y-as.

b Voor welke t beweegt het punt P zowel naar links als omhoog?

c Bereken exact de baansnelheid van P op het moment dat P door het punt $(-3, 9)$ gaat.

d Bereken in twee decimalen de minimale baansnelheid van P. Voor welke t wordt deze minimale snelheid bereikt?

e Bereken exact voor welke t de versnellingsvector evenwijdig is met de lijn $y = x$.



figuur G.11

21 De bewegingsvergelijkingen van een punt P zijn gegeven door $\begin{cases} x(t) = -t^3 + 3t^2 - 2t \\ y(t) = t^2 - 1 \end{cases}$

Zie figuur G.12.

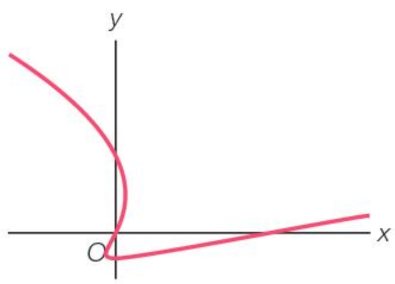
a Bereken algebraïsch de coördinaten van de snijpunten van de baan van P met de x-as en met de y-as.

b Bereken exact voor welke t de raaklijn aan de baan van P evenwijdig is met de x-as of met de y-as.

c Bereken exact de coördinaten van de punten van de baan van P waarin de raaklijn evenwijdig is met de lijn k: $y = 2x + 3$.

d Bereken exact de baansnelheid van P in het punt $(-6, 8)$.

e Bereken exact de baanversnelling van P in het punt $(-\frac{3}{8}, -\frac{3}{4})$.



figuur G.12

22 Toon aan.

a $F(x) = x + \ln\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)$ is een primitieve van $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x^2-1}$.

b $F(x) = x\ln\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right) + \ln(x^2-1)$ is een primitieve van $f(x) = \ln\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)$.

c $F(x) = -x^3\cos(x) + 3x^2\sin(x) + 6x\cos(x) - 6\sin(x)$ is een primitieve van $f(x) = x^3\sin(x)$.

d $F(x) = (6x^2 - 2x - 4)\sqrt{x-1}$ is een primitieve van $f(x) = 15x\sqrt{x-1}$.

23 Primitiveer.

a $f(x) = 7 \cdot \log(5x)$

b $f(x) = \mathrm{e}^{\frac{1}{2}x-1}$

c $f(x) = 10\ln(2x-4)$

d $f(x) = \dfrac{x^4 - 6x^2\sqrt{x} + 8x}{x^3}$

e $f(x) = (x^2+3)^2$

f $f(x) = 3\sin(4x)$

24 Primitiveer.

a $f(x) = \sqrt{6x+3}$

b $f(x) = \dfrac{10}{2x-1}$

c $f(x) = (3x-6)^{-2}$

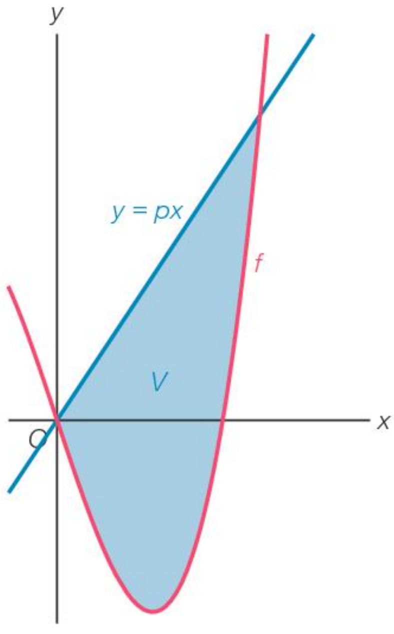
d $f(x) = (2x+5)^{-1}$

e $f(x) = 10^{2x-3}$

f $f(x) = \dfrac{8^x - 1}{2^x}$

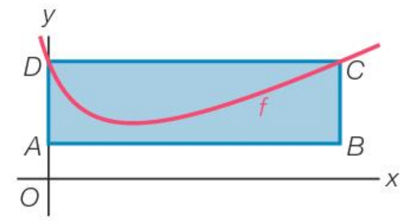
25 Een primitieve van de functie $f(x) = (x^2+1)\,\mathrm{e}^x$ is van de vorm $F(x) = (ax^2 + bx + c)\,\mathrm{e}^x$.
Bereken a, b en c.

26 Het vlakdeel V ligt rechts van de y-as en wordt ingesloten door de grafiek van de functie $f(x) = x^3 - 3x$ en de lijn $y = px$ met $p > 0$.
Bereken algebraïsch voor welke waarde van p de oppervlakte van V gelijk is aan 9.



figuur G.13

27 Gegeven is de rechthoek $ABCD$ met $A(0, p)$, $B(5, p)$, $C(5, 2)$ en $D(0, 2)$. Zie figuur G.14. De grafiek van de functie $f(x) = \frac{1}{2}x - 1 + \dfrac{3}{x+1}$ verdeelt de rechthoek in twee delen met gelijke oppervlakte.
Bereken exact de waarde van p.



figuur G.14

28 Een wielrenner moet bij een snelheid van 54 km/uur plotseling remmen voor een auto. Neem aan dat de versnelling tijdens het remmen constant is. Op $t = 0$ is de wielrenner op 40 meter afstand van de auto en begint hij te remmen.

a Bereken de versnelling van de wielrenner in m/s^2 in het geval de wielrenner na 40 meter tot stilstand komt.

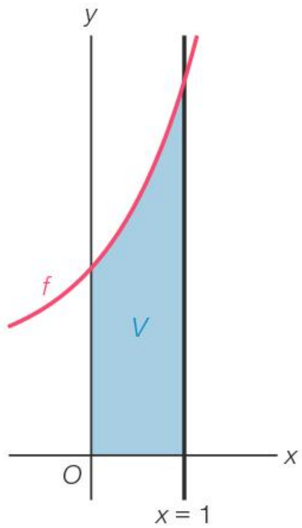
b De auto rijdt met een snelheid van 6 km/uur in dezelfde richting als de wielrenner. Om niet tijdens het remmen ten val te komen mag de versnelling van de wielrenner niet kleiner zijn dan $-2{,}5$ m/s^2. Onderzoek algebraïsch of de wielrenner op tijd voor de auto kan stoppen.

29 Het vlakdeel V wordt ingesloten door de grafiek van de functie $f(x) = 3^x + 1$, de x-as, de y-as en de lijn $x = 1$. Zie figuur G.15.

a Bereken exact de oppervlakte van V.

b Bereken exact de inhoud van het lichaam L dat ontstaat als V wentelt om de x-as.

c Bereken de inhoud van het lichaam M dat ontstaat als V wentelt om de y-as. Rond af op twee decimalen.



figuur G.15

30 Gegeven is de cirkel c: $x^2 + y^2 = r^2$. Bij wentelen van c om de x-as ontstaat de bol B.

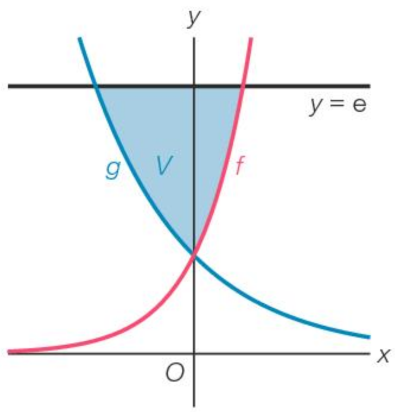
a Het vlakdeel V wordt ingesloten door c en de lijnen $x = \frac{1}{3}r$ en $x = \frac{1}{2}r$. Druk de inhoud van de bolschijf die ontstaat als V om de x-as wentelt uit in r.

b Het vlakdeel W wordt ingesloten door c en de lijnen $x = -pr$ en $x = pr$ met $0 < p < 1$.
Bereken voor welke waarde van p de inhoud van het lichaam dat ontstaat als W om de x-as wentelt gelijk is aan de helft van de inhoud van B. Rond af op twee decimalen.

31 Gegeven is de cirkel c: $x^2 + y^2 = 25$.
Het vlakdeel V wordt ingesloten door c en de lijnen $y = 3$ en $y = 4$.
Bij wentelen van V om de x-as ontstaat het lichaam L.
Bereken exact de inhoud van L.

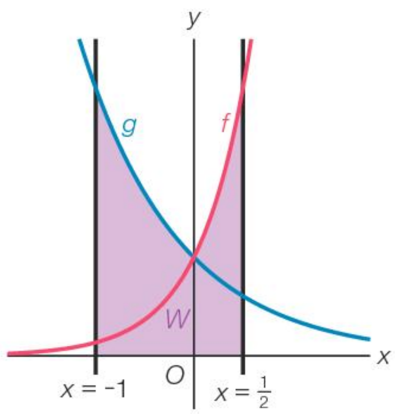
32 Gegeven zijn de functies $f(x) = \mathrm{e}^{2x}$ en $g(x) = \mathrm{e}^{-x}$.

a Het vlakdeel V wordt ingesloten door de grafiek van f, de grafiek van g en de lijn $y = \mathrm{e}$.
Bereken exact de inhoud van het lichaam L dat ontstaat als V wentelt om de lijn $y = \mathrm{e}$.



figuur G.16

b Het vlakdeel W in figuur G.17 wordt ingesloten door de grafieken van f en g, de lijnen $x = -1$, $x = \frac{1}{2}$ en de x-as.
Bewijs dat de lijn $x = \ln\left(\dfrac{4}{\mathrm{e}+3}\right)$ het vlakdeel W in twee delen met gelijke oppervlakte verdeelt.



figuur G.17

12 Goniometrische formules

33 Los exact op.

a $\sin(x + \frac{1}{3}\pi) = -\cos(x - \frac{2}{3}\pi)$

b $2\sin(x)\cos(x) = \cos(x + \frac{1}{6}\pi)$

c $\cos(x + \frac{1}{2}\pi) \cdot \cos(x) = \frac{1}{4}\sqrt{2}$

d $\sqrt{3} \cdot \sin(2x) + \cos(2x) = 1$

34 Primitiveer.

a $f(x) = (2 - \sin(x))^2$

b $g(x) = \sin(3x)\cos(\frac{1}{2}x) + \cos(3x)\sin(\frac{1}{2}x)$

c $h(x) = 4\cos^4(x) - \cos^2(2x)$

35 Gegeven is de functie $f(x) = \sin(x) - \cos(x) + \sqrt{2}$.

a Bewijs dat de grafiek van f de x-as raakt.

b Bewijs dat de grafiek van f puntsymmetrisch is in $A(\frac{1}{4}\pi, \sqrt{2})$.

c Bewijs dat de lijn $x = \frac{3}{4}\pi$ een symmetrieas is van de grafiek van f.

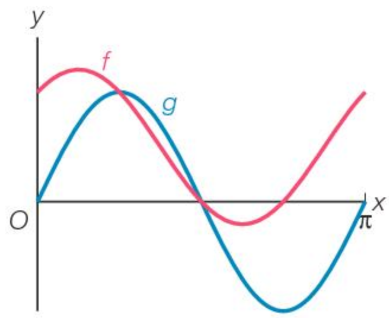
36 Het punt P beweegt over een cirkel. De bewegingsvergelijkingen van P zijn $\begin{cases} x(t) = a\cos(bt) \\ y(t) = a\sin(bt) \end{cases}$ met $a > 0$ en $b > 0$.

a Druk de baansnelheid $v(t)$ van P uit in a en b.

b Bewijs dat de snelheidsvector $\vec{v}(t)$ en de versnellingsvector $\vec{a}(t)$ in ieder punt van de cirkel loodrecht op elkaar staan.

c Gegeven is $v(t) = 10$ en $|\vec{a}(t)| = 5$.
Bereken de straal van de cirkel.

37 Gegeven zijn de functies $f(x) = 2\cos^2(x) + \sin(2x)$ en $g(x) = 2\sin(2x)$, beide met domein $[0, \pi]$.
In figuur G.18 zie je de grafieken van f en g.



figuur G.18

a Toon aan dat het functievoorschrift van f geschreven kan worden als $f(x) = \cos(2x) + \sin(2x) + 1$ en bereken exact het bereik van f.

b Het vlakdeel V wordt ingesloten door de grafieken van f en g.
Bereken exact de oppervlakte van V.

c De lijn $x = p$ snijdt de x-as in het punt A, de grafiek van f in het punt B en de grafiek van g in het punt C waarbij C het midden is van het lijnstuk AB.
Toon aan dat $\tan(p) = \frac{1}{3}$.

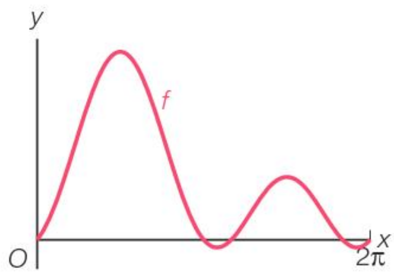
38 De punten P en Q voeren ieder vanaf $t = 0$ een harmonische trilling uit. De trillingen worden beschreven door de formules $u_P = 25\sin(8\pi t)$ en $u_Q = 40\sin(6\pi t)$. Hierin is u in mm en t in seconden.

a Welk punt legt de grootste afstand per minuut af? Hoe groot is het verschil?

b Voor welke waarde van t beginnen P en Q voor de tweede keer tegelijk aan een nieuwe trilling?

c Bereken het eerste tijdstip waarop de afstand tussen P en Q gelijk is aan 30 mm. Rond af op drie decimalen.

39 Gegeven is de functie $f(x) = 2\sin^2(x) + \sin(x)$ met domein $[0, 2\pi]$.



figuur G.19

a Bereken exact de oppervlakte van het grootste vlakdeel dat wordt ingesloten door de grafiek van f en de x-as.

b Bereken algebraïsch voor welke p de vergelijking $f(x) = p$ precies vier oplossingen heeft.

c De grafiek van f snijdt van de lijn $y = p$ met $p > 0$ een lijnstuk met lengte $\frac{2}{3}\pi$ af.
Bewijs dat de grafiek van f op het interval $[0, \pi]$ symmetrisch is en bereken exact de waarde van p.

40 De baan van een punt P is gegeven door $\begin{cases} x(t) = \sin(t) + \cos(t) \\ y(t) = 1 + 2\sin(2t + \pi) \end{cases}$

De baan van P kan ook geschreven worden in de vorm $y = ax^2 + b$.

a Bereken exact a en b.

b Bereken exact de coördinaten van de keerpunten van de baan.

41 Van de punten P en Q zijn de bewegingsvergelijkingen $\begin{cases} x_P(t) = 4\cos(5t) \\ y_P(t) = 4\sin(5t) \end{cases}$

en $\begin{cases} x_Q(t) = 5\cos(3t) \\ y_Q(t) = 5\sin(3t) \end{cases}$ met t de tijd in seconden en $0 \leq t \leq 2\pi$.

a Geef de maximale en de minimale afstand tussen P en Q. Voor welke waarden van t worden deze afstanden bereikt?

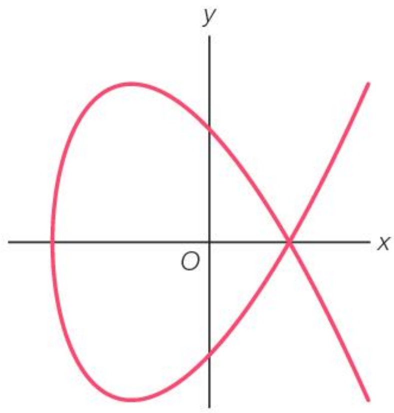
Voor de afstand tussen P en Q geldt $PQ = \sqrt{1 + 80\sin^2(t)}$.

b Bewijs dit.

c Bereken exact voor welke t de afstand tussen P en Q gelijk is aan $\sqrt{41}$.

d Bereken voor welke t het lijnstuk PQ voor de eerste keer evenwijdig is met de y-as. Rond af op twee decimalen.

42 De baan van een punt P is gegeven door $\begin{cases} x(t) = \cos(2t) \\ y(t) = \cos(3t) \end{cases}$ met t in $[0, \pi]$. De baan van P is symmetrisch in de x-as. Zie figuur G.20.



figuur G.20

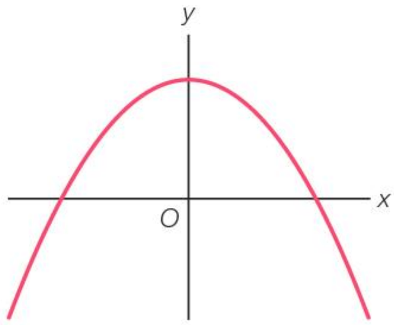
a Bereken in graden de hoek φ waaronder de baan van P zichzelf snijdt op de x-as.

b Stel een vergelijking op van de raaklijn k aan de baan in het snijpunt van de baan met de positieve y-as.

c Bereken exact de baansnelheid waarmee P de negatieve x-as passeert.

d De lijn $x = p$ snijdt de baan in de punten A en B waarbij $AB = 1$.
Bereken de waarden van p. Rond af op twee decimalen.

43 De baan van een punt P is gegeven door
$\begin{cases} x(t) = 3\cos(t + \frac{1}{2}\pi) \\ y(t) = 2\cos(2t) \end{cases}$ met t in $[-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi]$.
Zie figuur G.21.



figuur G.21

a Bereken in graden in één decimaal de hoek φ waaronder de baan van P de positieve x-as snijdt.

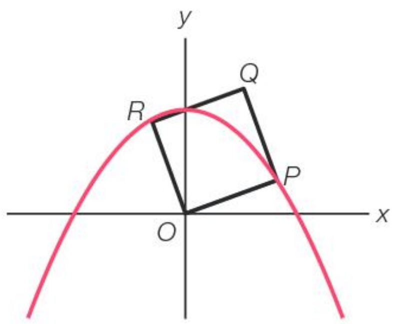
b Bereken exact de baansnelheid waarmee P de positieve x-as passeert.

c Bewijs dat de baan van P een deel van een parabool is.

Het lijnstuk OP is een zijde van het vierkant $OPQR$ zoals in figuur G.22.

d Stel de bewegingsvergelijkingen op van Q.

e Bereken de oppervlakte van $OPQR$ op het moment dat Q de y-as passeert. Rond af op twee decimalen.



figuur G.22

K Voortgezette integraalrekening

44 Primitiveer.

a $f(x) = \dfrac{x+2}{x^2 - 4x + 8}$

b $f(x) = 3x^2 \sin(x^3)$

c $f(x) = \cos(x) \cdot \sqrt[3]{1 + \sin(x)}$

d $f(x) = (2x + 4)\cos(2x)$

e $f(x) = \dfrac{2x+1}{\sqrt{16 - x^2}}$

f $f(x) = \dfrac{2x+4}{\sqrt{-x^2 - 4x - 3}}$

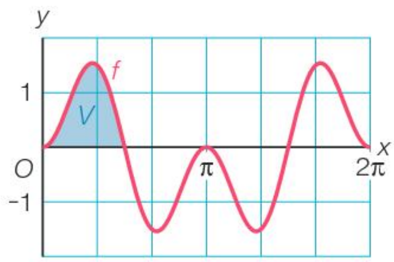
g $f(x) = \dfrac{2x+7}{x^2 + 6x + 8}$

45 Gegeven is de functie $f(x) = 4\sin^2(x)\cos(x)$ met domein $[0, 2\pi]$.

a Toon met behulp van differentiëren aan dat de grafiek van f de x-as raakt.

b Stel algebraïsch de formule op van de raaklijn k van de grafiek van f in het punt A met $x_A = \frac{1}{2}\pi$.

c V is het gebied dat wordt ingesloten door de grafiek van f en de x-as tussen $x = 0$ en $x = \frac{1}{2}\pi$. Zie figuur G.23. Bereken exact de oppervlakte van V.



figuur G.23

46 Gegeven is de functie $f(x) = \dfrac{2x}{x^2 - 4}$.

a Bereken exact de oppervlakte van het vlakdeel V dat wordt ingesloten door de grafiek van f, de y-as en de lijn $y = \frac{2}{3}$.

b Bereken exact voor welke waarde van p met $p > 2$ geldt

$$\int_{p}^{p+4} f(x)\,dx = \ln(2).$$

47 Gegeven is de functie $f(x) = \dfrac{x^3 + 10x}{x^2 + 1}$.

a Bereken exact de coördinaten van de toppen van de grafiek van f.

b Stel algebraïsch de formule op van de raaklijn k van de grafiek van f in het punt A met $x_A = 1$.

c Voor welke waarden van p heeft de vergelijking $f(x) = p$ precies één oplossing?

d Bereken exact de oppervlakte van het vlakdeel V dat wordt ingesloten door de grafiek van f, de x-as en de lijn $x = 3$.

48 Gegeven is de functie $f(x) = (2x^2 + x - 1)\,e^x$.

a Bereken exact de coördinaten van de toppen van de grafiek van f.

Het vlakdeel V wordt ingesloten door de grafiek van f en de x-as.

b Bereken exact de oppervlakte van V.

c De lijn $x = p$ verdeelt V in twee delen met gelijke oppervlakte. Bereken p in drie decimalen.

49 **a** Bereken de primitieven van $f(x) = x^3 \ln(x)$.

b Bereken de primitieven van $f(x) = x \ln(x^3)$.

c Leid een algemene formule af voor de primitieven van de functies $f_n(x) = x^n \ln(x)$ met $n \neq -1$.

d Leid een algemene formule af voor de primitieven van de functies $f_m(x) = x \ln(x^m)$.

50 Gegeven zijn de functies $f_p(x) = 2\ln^2(x) - 2p\ln(x)$ met $p \neq 0$.

a Bereken exact de oppervlakte van het vlakdeel dat wordt ingesloten door de grafiek van f_1 en de x-as.

b Bereken algebraïsch voor welke waarde van p de oppervlakte van het vlakdeel dat wordt ingesloten door de grafiek van f_p en de x-as gelijk is aan 8.

51 Gegeven is de functie $f(x) = x + e^{-x}$.

a Bereken algebraïsch het bereik van f.

b Bereken exact voor welke waarde van p de oppervlakte van het vlakdeel V_p dat wordt ingesloten door de grafiek van f, de x-as en de lijnen $x = p$ en $x = -p$ gelijk is aan 6.

c Bereken exact de inhoud van het lichaam dat ontstaat als het vlakdeel W dat wordt ingesloten door de grafiek van f, de x-as, de y-as en de lijn $x = -1$ wentelt om de x-as.

52 **a** Bereken de primitieven van de functie $f(x) = \dfrac{1}{e^x + 1}$ door teller en noemer te vermenigvuldigen met e^{-x}.

b Bereken de primitieven van de functie $f(x) = \dfrac{\ln(\sin(x))}{\cos^2(x)}$ met behulp van partieel integreren.

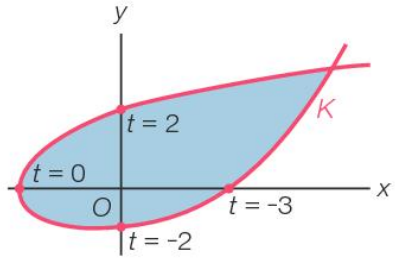
c Bereken de primitieven van de functie $f(x) = x\sqrt{2x + 1}$ met behulp van de substitutie $\sqrt{2x + 1} = u$.

53 De kromme K is gegeven door $\begin{cases} x(t) = t^2 - 4 \\ y(t) = t\ln(t+4) \end{cases}$

K snijdt zichzelf op de lijn $x = 11$.

a Toon dit aan.

b Bereken de oppervlakte van het door K omsloten vlakdeel. Rond af op twee decimalen.



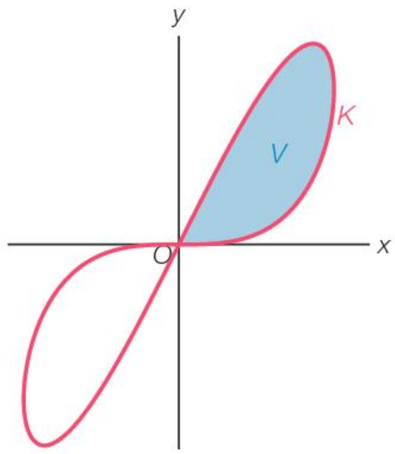
figuur G.24

54 De kromme K is gegeven door $\begin{cases} x(t) = 4\sin(t) \\ y(t) = 4\sin(t) - 2\sin(2t) \end{cases}$

V is het rechtervlakdeel dat wordt omsloten door K. Zie figuur G.25.

a Bereken exact de oppervlakte van V.

b Bereken de inhoud van het lichaam L dat ontstaat als V wentelt om de x-as. Rond af op twee decimalen.



figuur G.25

Overzicht GR-modules

Module	
Berekeningen op het basisscherm • Eenvoudige berekeningen met onder andere mintekens, haakjes en tussenstappen • De toets Ans en fouten verbeteren • Breuken invoeren, vermenigvuldigen en delen • Decimaal getal omzetten in breuk	vwo B deel 1 hoofdstuk 1 bladzijde 14
Formules, grafieken en tabellen • Formules invoeren en grafieken plotten • Functiewaarden berekenen op het grafiekenscherm en op het basisscherm • Tabellen maken en de tabelinstelling veranderen	vwo B deel 1 hoofdstuk 1 bladzijde 42
Toppen en snijpunten • Toppen en snijpunten van grafieken • Berekenen van nulpunten	vwo B deel 1 hoofdstuk 1 bladzijde 42
Helling • De richtingscoëfficiënt van een raaklijn	vwo B deel 1 hoofdstuk 2 bladzijde 66
Het gebruik van Ans en lettergeheugens • De toets Ans • Het gebruik van lettergeheugens	vwo B deel 1 hoofdstuk 3 bladzijde 100
Integreren • Integralen berekenen op het basisscherm • Integralen berekenen op het grafiekenscherm	vwo B deel 3 hoofdstuk 11 bladzijde 126
Allerlei • Specifieke mogelijkheden van het merk/type GR	

Overzicht routes

9 Exponentiële en logaritmische functies

9.1 Rekenregels voor logaritmen

opgave	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23
⧠ basis																							
⊙ midden																							
✱ uitdagend																							

9.2 Exponentiële en logaritmische formules

opgave	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44
⧠ basis																					
⊙ midden																					
✱ uitdagend																					

9.3 Het grondtal e

opgave	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60	61	62	63	64	65
⧠ basis																					
⊙ midden																					
✱ uitdagend																					

9.4 De natuurlijke logaritme

opgave	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80	81	82	83	84	85	86
◘ basis																					
⊙ midden																					
∗ uitdagend																					

10 Meetkunde met vectoren

10.1 Vectoren

opgave	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
◘ basis												
⊙ midden												
✱ uitdagend												

10.2 Vectoren en rotaties

opgave	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26
◘ basis														
⊙ midden														
✱ uitdagend														

10.3 Vectoren en lijnen

opgave	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43
◘ basis																	
⊙ midden																	
✱ uitdagend																	

10.4 Vectoren en hoeken

opgave	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60	61	62	63
◘ basis																				
⊙ midden																				
✱ uitdagend																				

10.5 Vectoren bij snelheid en versnelling

opgave	64	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74
◘ basis											
⊙ midden											
✱ uitdagend											

11 Integraalrekening

11.1 Primitieven en integralen

opgave	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
◘ basis																					
⊙ midden																					
✱ uitdagend																					

11.2 Oppervlakten

opgave	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47
◘ basis																										
⊙ midden																										
✱ uitdagend																										

11.3 Inhouden

opgave	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60	61	62	63	64	65	66	67	68
◘ basis																					
⊙ midden																					
✱ uitdagend																					

11.4 Toepassingen van integralen

opgave	69	70	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80	81
◘ basis													
⊙ midden													
✱ uitdagend													

12 Goniometrische formules

12.1 Goniometrische formules bij vergelijkingen en herleidingen

opgave	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
basis																						
⊙ midden																						
∗ uitdagend																						

12.2 Goniometrische formules bij symmetrie en primitiveren

opgave	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35
basis													
⊙ midden													
∗ uitdagend													

12.3 Eenparige cirkelbewegingen en harmonische trillingen

opgave	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45
basis										
⊙ midden										
∗ uitdagend										

12.4 Bewegingsvergelijkingen met goniometrische formules

opgave	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60	61	62	63	64	65
basis																				
⊙ midden																				
∗ uitdagend																				

K Voortgezette integraalrekening

K.1 De substitutiemethode

opgave	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
□ basis																
⊙ midden																
✱ uitdagend																

K.2 Partieel integreren

opgave	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
□ basis													
⊙ midden													
✱ uitdagend													

K.3 Cyclometrische functies

opgave	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49
□ basis																				
⊙ midden																				
✱ uitdagend																				

K.4 Breuksplitsen

opgave	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60	61	62	63	64	65	66	67
□ basis																		
⊙ midden																		
✱ uitdagend																		

K.5 Integralen bij parameterkrommen

opgave	68	69	70	71	72	73	74	75	76	77
□ basis										
⊙ midden										
✱ uitdagend										

Trefwoordenregister

Verantwoording

Illustraties: Richard van de Pol Illustratie & Vormgeving, Tilburg; Haasart, Wim de Haas, Rhenen
Technisch tekenwerk: Integra Software Services
Beeldresearch: B en U International Picture Service, Amsterdam

Colofon
Omslagontwerp: InOntwerp, Assen
Ontwerp binnenwerk: Ebel Kuipers, Sappemeer
Lay-out: Integra Software Services

Foto's
Beeldresearch: B en U International Picture Service, Amsterdam

Shutterstock: p. 6-7, 8, 22, 24, 34, 42, 134, 178-179, 223 b
John Napier / John Napier University: p. 16
Imageselect: p. 35, 58, 151, 180, 223 o
Getty Images: p. 45
iStock: p. 48-49
Ten'nenji Temple Nagano: p. 50
Henricus Hubertus van Aubel: p. 65
ANP / Hollandse Hoogte / Flip Franssen: p. 94-95
NASA: p. 135
Kjell Postema / Walibi Holland: p. 140-141
Wikipedia / Boris23: p. 175

Eventuele op- en aanmerkingen over deze of andere uitgaven kunt u richten aan: Noordhoff Uitgevers bv, Afdeling Voortgezet onderwijs, Antwoordnummer 13, 9700 VB Groningen of via het contactformulier op www.mijnnoordhoff.nl.

MIX
Papier van verantwoorde herkomst
FSC® C118189

0 / 21

ISBN 978-90-01-73708-5

Bij dit boek hoort een digitale leeromgeving.
Als je de opdrachten online maakt, zie je direct wat er al goed gaat. Je krijgt daarbij handige tips, zodat je het de volgende keer beter doet.

Op basis van je resultaten krijg je bovendien opdrachten op jouw niveau. Dus wat moeilijker als het goed gaat of met meer hulp als je dat nodig hebt.
Met de oefentoetsen kun je je voorbereiden op het proefwerk.
Als je meer uitleg nodig hebt, zijn er ook nog handige uitlegvideo's.

Noordhoff

MIX
Papier van verantwoorde herkomst
FSC® C118189

www.getalenruimte.noordhoff.nl

ISBN 978-90-01-73708-5
9 789001 737085